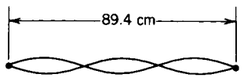


Figura 32 Problema 40.

donde x y y están en centímetros y t en segundos. (*a*) ¿Cuáles son la amplitud y la velocidad de las ondas componentes cuya superposición pueda dar lugar a esta vibración? (*b*) Halle la distancia entre nodos. (*c*) ¿Cuál es la velocidad de una partícula de la cuerda en posición x = 1.47 cm en el tiempo t = 1.36 s?

43. Las vibraciones que parten de un diapasón de 622 Hz producen ondas estacionarias en una cuerda sujeta en ambos extremos. La velocidad de la onda para la cuerda es de 388 m/s. La onda estacionaria tiene cuatro rizos y una amplitud de 1.90 mm. (*a*) ¿Cuál es la longitud de la cuerda? (*b*) Escriba una ecuación para el desplazamiento de la cuerda en función de la posición y del tiempo.

44. Considérese una onda estacionaria que sea la suma de dos ondas que viajan en direcciones opuestas pero por lo demás son idénticas. Demuestre que la energía cinética máxima en cada rizo de la onda estacionaria es $2\pi^2\mu y_m^2 \nu v$.

45. Una onda viajera incidente, de amplitud A_i, se refleja sólo parcialmente desde un extremo, siendo A_r la amplitud de la onda reflejada. La superposición resultante de dos ondas de amplitudes diferentes que viajan en direcciones opuestas produce un patrón de ondas tipo onda estacionaria cuya envolvente se muestra en la figura 33. La *razón de onda estacionaria* (SWR, de *standing wave ratio*) se define como $(A_i + A_r)/(A_i - A_r) = A_{máx}/A_{mín}$, y el porcentaje de reflexión se define como la razón entre la potencia promedio en la onda reflejada y la potencia promedio en la onda incidente, multiplicada por 100. (*a*) Demuestre que la SWR = ∞ para el 100% de reflexión y que la SWR = 1 cuando no hay reflexión. (*b*) Demuestre que una medición de la SWR justo antes del extremo revela la reflexión porcentual que ocurre en el extremo de acuerdo con la fórmula

$$\%\text{ de reflejo} = [(\text{SWR} - 1)^2/(\text{SWR} + 1)^2](100).$$

46. Calcule (*a*) la SWR (razón de onda estacionaria) y (*b*) la reflexión porcentual en el extremo para la envolvente del patrón de onda estacionaria mostrado en la figura 33.

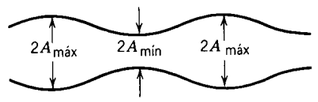


Figura 33 Problemas 45 y 46.

47. Dos cuerdas de densidad de masa lineal μ_1 y μ_2 están anudadas entre sí en x = 0 y estiradas a una tensión F. Una onda $y = A$ sen $k_1(x - v_1t)$ en la cuerda de densidad μ_1 llega a la unión de las dos cuerdas, en donde parte se transmite por la cuerda de densidad μ_2 parte se refleja. Llamemos a estas ondas B sen $k_2(x - v_2t)$ y C sen $k_1(x + v_1t)$, respectivamente. (*a*) Suponiendo que $k_2v_2 = k_1v_1 = \omega$ y que el desplazamiento del nudo que surge de las ondas incidente y reflejada sea el mismo que el que surge de la onda transmitida, demuestre que $A = B + C$. (*b*) Si se supone que ambas cuerdas tienen cerca del nudo la misma pendiente (¿por qué?), es decir, dy/dx en la cuerda 1 = dy/dx en la cuerda 2, demuestre que

$$C = A\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} = A\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}.$$

¿En qué condiciones es C negativa?

Sección 19-10 Resonancia

48. Una cuerda de violín de 15 cm, fija en ambos extremos, está vibrando en su modo n = 1. La velocidad de las ondas en este alambre es de 250 m/s, y la velocidad del sonido en el aire es de 348 m/s. ¿Cuáles son (*a*) la frecuencia y (*b*) la longitud de onda de la onda sonora emitida?

49. ¿Cuáles son las tres frecuencias más bajas de las ondas estacionarias en un alambre de 9.88 m de longitud que tiene una masa de 0.107 kg, y que está estirado bajo una tensión de 236 N?

50. Un alambre de 1.48 m de longitud tiene una masa de 8.62 g y se halla bajo una tensión de 122 N. El alambre está sujeto rígidamente en ambos extremos y se pone en vibración. Calcule (*a*) la velocidad de las ondas en el alambre, (*b*) las longitudes de onda de las ondas que producen ondas estacionarias de uno y dos rizos en el alambre y (*c*) las frecuencias de las ondas en (*b*).

51. Un extremo de una cuerda de 120 cm se mantiene fijo. El otro extremo está unido a un anillo sin peso que puede deslizarse a lo largo de una barra sin fricción como se muestra en la figura 34. ¿Cuáles son las tres longitudes de onda más grandes posibles de ondas estacionarias en la cuerda? Trace las ondas estacionarias correspondientes.

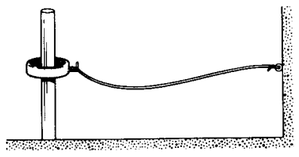


Figura 34 Problema 51.

52. Una cuerda de 75.6 cm está estirada entre soportes fijos. Se observa que tiene frecuencias de resonancia de 420 y 315 Hz, y ninguna otra entre estas dos. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia más baja de esta cuerda? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de onda en esta cuerda?

53. En un experimento sobre ondas estacionarias, una cuerda de 92.4 cm de longitud se une al vástago de un diapasón eléctrico que vibra en dirección perpendicular a la longitud de la cuerda con una frecuencia de 60.0 Hz. La masa de la cuerda es 44.2 g. ¿A qué tensión debe someterse la cuerda (en el otro extremo tiene conectadas a ella pesas) para que vibre con cuatro rizos?

54. Un alambre de aluminio de longitud L= 60.0 cm y área de la sección transversal 1.00×10^{-2} cm^2 de área en su sección transversal está conectado a un alambre de acero de la misma área de su sección transversal. El alambre compuesto, cargado con un bloque de 10.0 kg de masa m, está dispuesto como se muestra en la figura 35 de modo que la distancia L_2 desde la junta a la polea de soporte es de 86.6 cm. Se inducen ondas trasversales en el alambre usando una fuente externa de frecuencia variable. (*a*) Halle la frecuencia de excitación de ondas estacionarias más baja observada de modo que la unión del alambre sea un nodo. (*b*) ¿Cuál es el número total de nodos observado a esta frecuencia, excluyendo los dos de los extremos del alambre? La densidad del aluminio es de 2.60 g/cm^3 y la del acero es de 7.80 g/cm^3.

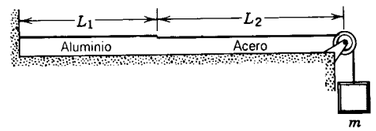


Figura 35 Problema 54.

55. Una cuerda de piano de 1.4 m de longitud está hecha de acero con una densidad de 7.8 g/cm^3 y un módulo de Young de 220 MPa. La tensión en la cuerda produce una deformación de 1.0%. Calcule la frecuencia de resonancia más baja de la cuerda.

Proyectos de computación

56. (*a*) Inicialmente una cuerda tensa tiene una forma dada por $f_1(x) = 0.02e^{-(x-5)^2/9}$, en donde f y x están en metros. Supongamos una pulsación que se mueva con una velocidad v = 25 m/s en dirección x positiva, de modo que el desplazamiento de la cuerda en la coordenada x y en el tiempo t esté dada por $y_1(x,t) = f(x - vt) = 0.02e^{-(x-vt-5)^2/9}$. Úsese un programa de computación o una hoja de cálculo para trazar $y_1(x,t)$ en función de x desde x = 0 hasta x = 50 m para t = 0, 0.5, 1.0, y 1.5 s. Con preferencia trace las gráficas en la pantalla de un monitor y diseñe el programa de modo que pueda cambiarse fácilmente el valor de t y se pueda volver a trazar. Observe la posición del máximo de la pulsación en cada gráfica y verifique que las gráficas dibujan una pulsación que viaja en dirección x positiva, con una velocidad de 25 m/s, y se mueve sin cambiar de forma. (*b*) Una segunda pulsación tiene la forma $f_2(x) = 0.02e^{-(x-45)^2/9}$ en t = 0 y se mueve en la dirección x negativa con una velocidad de 25 m/s. Use su programa para trazar $y_2(x,t) = f_2(x + vt)$ desde x = 0 hasta x = 50 m para t = 0, 0.5, 0.8, 1.0, y 1.5 s. Verifique que las gráficas dibujan una pulsación que se mueve en la dirección x negativa. (*c*) Suponga que ambas pulsaciones están en la cuerda al mismo tiempo. Use su programa para trazar $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ desde x = 0 hasta x = 50 m para t = 0, 0.5, 1.0, y 1.5 s. Verifique que las gráficas dibujan las pulsaciones moviéndose una hacia la otra y que cuando se reúnen el desplazamiento de la cuerda es grande en la región donde se superponen. Las pulsaciones se mueven luego alejándose entre sí sin cambiar de forma. (*d*) Suponga que la segunda onda tiene la forma $f_2(x, t) = -0.02e^{-(x-45)^2/9}$ en t = 0 y que viaja en dirección x negativa con una velocidad de 25 m/s. Use su programa para trazar $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ desde x = 0 hasta x = 50 m para t = 0, 0.5, 0.8, 1.0, y 1.5 s. Cuando se reúnen las dos pulsaciones, la acción de una tiende a anular la acción de la otra. Para un valor del tiempo, el desplazamiento de la cuerda es cero en cualquier parte. Las pulsaciones continúan luego su camino sin cambiar de forma.

57. Pueden generarse ondas en una cuerda tensa moviendo uno de sus extremos. Supongamos que la cuerda sea extremadamente larga y hagamos que $g(t)$ sea el desplazamiento del extremo que se mueve, el cual se presume que está en x = 0. Si la cuerda se tira a lo largo del eje x positivo, en el tiempo t el desplazamiento en el punto en x es el mismo que el desplazamiento en el extremo pero en un tiempo $t - x/v$ anterior, donde v es la velocidad de la onda. Entonces, el desplazamiento en x está dado por $y(x, t) = g(t - x/v)$. (*a*) Supongamos que, comenzando en t = 0 y continuando durante 0.20 s, la cuerda en x = 0 se jala hacia arriba en la dirección y positiva con una velocidad constante de 0.15 m/s. Luego es mantenida en su desplazamiento final. Entonces $g(t) = 0$ para $t < 0$, $g(t) = 0.15t$ para $0 < t < 0.20$ s, y $g(t) = 0.15 \times 0.20 = 0.030$ m para $t > 0.20$ s. Considere que la velocidad de la onda es de 5.0 m/s y use un programa de computadora para hacer gráficas separadas de $y(x,t)$ desde x = 0 hasta x = 20 m para t = 0, 0.1, 0.2, 1.0, 2.0, y 3.0 s. Para esto, haga que la computadora calcule $u = x - vt$ para cada valor de x seleccionado, luego haga a $y = 0$ si $u < 0$, a $y = 0.15u$ si $0 < u < 0.20$, y a $y = 0.03$ si $u > 0.20$. (*b*) Considere que la velocidad de la onda sea de 15 m/s y trace $y(x,t)$ desde x = 0 hasta x = 20 m para t = 0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.75, 1.0, y 1.25 s. (*c*) ¿Qué determina la pendiente de la cuerda al moverse la pulsación a lo largo de ella? Si el extremo de la cuerda se eleva más rapidamente, ¿aumenta la pendiente de la cuerda o disminuye? Si la velocidad de la onda aumenta, ¿aumenta la pendiente o disminuye?

58. Comenzando en el tiempo t = 0 y continuando durante 0.40 s, el extremo de una cuerda tensa se mueve ligeramente hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple. Su desplazamiento está dado por $g(t)$ = 0.020 sen (31.4t), donde g está en metros y t en segundos. Use una computadora para hacer gráficas separadas del desplazamiento $y(x, t)$ de la cuerda desde x = 0 hasta x = 20 m para cada uno de los tiempos t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, y 2.5 s. Véase el proyecto anterior para algunas sugerencias.

59. Una cuerda tensa tiene inicialmente una forma distorsionada dada por $f(x) = 0.02e^{-(x-5)^2/9}$, donde f y x están en metros. La pulsación viaja 5.0 m/s en la dirección x positiva a lo largo de la cuerda hasta que llega al extremo fijo en x = 20 m, en donde se refleja. El desplazamiento de la cuerda está dado por $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$, en donde y_1 es la pulsación incidente y y_2 es la pulsación

reflejada. Por supuesto, la pulsación incidente está dada por $y_1(x, t) = f(x - vt) = 0.02e^{-(x - vt - 5)^2/9}$. Demuestre que la pulsación reflejada está dada por $y_2(x, t) = -f(2L - x - vt) = -0.02e^{-(2L - x - vt - 5)^2/9}$, donde L es la coordenada del punto fijo. Ésta es la única función de $x + vt$ tal que $y_1(L,t) + y_2(L,t) = 0$. Use un programa de computadora o una hoja de cálculo para hacer graficas separadas del desplazamiento de la cuerda desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m para $t = 0$, 1.0, 2.0, 2.5, 2.75, 3.0, 3.25, 3.5, 4.0, y 5.0 s. La función a trazar es $y(x, t) = 0.020e^{-(x - vt - 5)^2/9} - 0.020e^{-(2L - x - vt - 5)^2/9}$.

60. Una cuerda tensa que transporta una onda tiene energía: energía cinética porque se mueve y energía potencial porque está distorsionada. Si μ es la densidad de masa lineal, entonces la energía cinética en una longitud infinitesimal dx está dada por $\frac{1}{2}\mu(\partial y/\partial t)^2\,dx$. Si F es la tensión en la cuerda, entonces la energía potencial en una longitud infinitesimal está dada por $\frac{1}{2}F(\partial y/\partial x)^2\,dx$. Puesto que $y(x, t) = f(x \pm vt)$ y $v = \sqrt{F/\mu}$, estas dos cantidades son exactamente iguales para cuerdas de la misma longitud. Entonces la energía mecánica total en la cuerda desde x hasta $x + \Delta x$ está dada por

$$E = \mu \int_x^{x+\Delta x} (\partial y/\partial t)^2\,dx.$$

Puede usarse el programa de integración numerica descrito en los proyectos de computación del capítulo 8 para evaluar integrales de esta forma.

(*a*) La tensión en una cuerda que tiene una densidad de masa lineal de 0.080 kg/m es de 2.0 N. En el tiempo $t = 0$ la cuerda está distorsionada de modo que tiene la forma dada por $f(x) = 0.02e^{-(x - 5)^2/9}$, donde f y x están en metros. Suponga que la pulsación se mueve en la dirección x positiva. Demuestre que

$$E = (0.04/9)^2\mu v^2 \int_x^{x+\Delta x} (x - vt - 5)^2 e^{-(x - vt - 5)^2/4.5}\,dx.$$

(*b*) Use una integración numérica para calcular la energía total en el segmento de cuerda desde $x = 0$ hasta $x = 20$ m en $t = 1$ s. Este segmento incluye a todas las pulsaciones excepto en las colas muy pequeñas. El uso de 200 intervalos produciría una precisión de cuatro cifras significativas. (*c*) Use una integración numérica para calcular la energía total en el segmento de cuerda desde $x = 30$ m hasta $x = 50$ m en $t = 7$ s. El resultado sería el mismo que en la parte (*b*) y le indicaría que la energía se ha movido desde la región de alrededor de $x = 10$ m hasta la región de alrededor de $x = 40$ m. Esto tiene sentido, porque la velocidad de la onda es de 5.0 m/s y la onda viajó 30 m en los 6 s transcurridos. (*d*) La cantidad a la que la energía pasa el punto en x está dada por $P = -F(\partial y/\partial x)(\partial y/\partial t)$, así que en el intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$ la energía que pasa por x está dada por

$$E = \int_t^{t+\Delta t} P\,dt = -F \int_t^{t+\Delta t} (\partial y/\partial x)(\partial y/\partial t)\,dt.$$

Para la pulsación descrita arriba demuestre que

$$E = (0.04/9)^2 Fv \int_t^{t+\Delta t} (x - vt - 5)^2 e^{-(x - vt - 5)^2/4.5}\,dt.$$

Use una integración numérica para calcular la energía que pasó por el punto en $x = 25$ m desde $t = 1$ hasta $t = 7$ s. El resultado es de nuevo el mismo que antes, indicando que toda la energía alrededor de $x = 10$ m en $t = 1$ s pasó por $x = 25$ m en su camino hacia la región alrededor de $x = 40$ m.

CAPÍTULO 20

ONDAS SONORAS

En el capítulo 19 hemos estudiado las ondas mecánicas transversales, como las de las vibraciones de una cuerda en tensión. En una onda mecánica longitudinal, *las partículas de material que transmiten la onda vibran en dirección de la propagación de la onda. La onda mecánica longitudinal más conocida es la onda sonora. El ser humano puede detectar estas ondas en la gama de frecuencias que va de unos 20 Hz a unos 20,000 Hz, gama que recibe el nombre de intervalo* audible. *Las ondas mecánicas longitudinales de frecuencia más alta se llaman* ultrasónicas *y se emplean para localizar objetos bajo el agua y para visualizar los órganos internos del cuerpo humano, en medicina; las ondas de frecuencia más baja se llaman* infrasónicas, *y un ejemplo de éstas son las ondas de presión sísmica producidas durante un terremoto.*

Las ondas sonoras viajan a través de sólidos, líquidos, y gases: estudiaremos principalmente la propagación del sonido en el aire. Un sistema vibratorio (por ejemplo, la cuerda de una guitarra, nuestras cuerdas vocales, la membrana de un tambor) pone en movimiento al aire en su vecindad inmediata. Esa perturbación se propaga por el aire hasta llegar a nuestros tímpanos, donde un receptor y un amplificador asombrosamente delicados convierten esta perturbación mecánica en una señal eléctrica que va hasta el cerebro.

En este capítulo estudiaremos las propiedades de las ondas sonoras, su propagación, y su producción mediante sistemas vibratorios.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

20-1 LA VELOCIDAD DEL SONIDO

Si bien las ondas sonoras viajan normalmente en tres dimensiones, simplificaremos un poco nuestro análisis al considerar un sistema unidimensional. La figura 1 muestra un tubo equipado en un extremo con un émbolo móvil, el cual representa, por ejemplo, el cono móvil de un altoparlante. Suponemos que el tubo está lleno de un medio compresible, como el aire, y que es muy largo, de modo que no precisamos considerar las reflexiones desde el extremo lejano. Cuando el émbolo se mueve hacia atrás y hacia adelante, alternativamente comprime y enrarece el medio. Estas compresiones y enrarecimientos pueden considerarse (respectivamente) incrementos y decrementos de la densidad local con relación a su valor promedio en el medio, o quizá como incrementos y decrementos en la presión local con relación a su valor promedio. Estas dos descripciones nos transmiten la misma información pero tienen formas matemáticas diferentes, como veremos en la sección 20-2.

Como resultado de las fuerzas mecánicas internas del medio, las compresiones y enrarecimientos viajan a lo

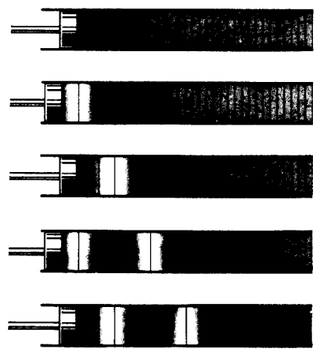


Figura 1 Ondas sonoras generadas dentro de un tubo por medio de un émbolo móvil que podría representar el cono móvil de un altoparlante. Las líneas verticales dividen al medio compresible dentro del tubo en capas de igual masa.

largo del tubo. Como en todas las ondas mecánicas, la velocidad de propagación depende de la razón entre una propiedad elástica del medio (la tensión, en el caso de las ondas transversales de una cuerda) y una propiedad inercial del medio (la densidad de masa lineal, en el caso de la cuerda). En ondas longitudinales, la propiedad elástica describe cómo responde el medio a los cambios de presión con un cambio de volumen; esto es el módulo volumétrico* presentado en la ecuación 5 del capítulo 17:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}, \tag{1}$$

donde Δp es el cambio de presión, y ΔV es el cambio del volumen V. El signo menos implica que un aumento de presión ($\Delta p > 0$) causa una disminución de volumen ($\Delta V < 0$).

La propiedad inercial del medio debe estar dada por su densidad ρ. Podemos llevar a cabo un análisis dimensional para determinar cómo depende la velocidad de B y ρ usando el mismo procedimiento empleado en la sección 19-4, y el resultado es

$$v = C\sqrt{\frac{B}{\rho}}, \tag{2}$$

donde una vez más la constante sin dimensiones C no puede determinarse a partir de este método de análisis. Para completar la derivación nos remitimos, como hicimos en la sección 19-4, a un análisis mecánico basado en las leyes de Newton.

Análisis mecánico

La esencia de esta derivación sigue muy de cerca la de la sección 19-4. Consideremos, para simplificar, una sola pulsación de compresión, como la que pudiera producirse por una sola carrera del émbolo de la figura 1.

Supongamos que la pulsación de compresión viaja a través del tubo de izquierda a derecha con velocidad v.

* Un cambio de presión dado puede dar lugar a cambios diferentes en el volumen de un medio compresible, dependiendo de las circunstancias por las cuales cambie de presión. Por ejemplo, puesto que una compresión tiende a aumentar la temperatura del medio, podríamos dejar que escapase calor con el fin de que la temperatura permanezca constante. En tal caso, siendo un ejemplo los procesos fluidos estáticos estudiados en el capítulo 17, observaríamos un módulo volumétrico *isotérmico* (temperatura constante). Sin embargo, la capacidad de un gas para conducir calor (su *conductividad térmica*: véase la sección 25-7) es demasiado pequeña para que pueda fluir el calor entre las compresiones, más calientes, y los enrarecimientos, más fríos, a frecuencias audibles. En este caso, necesitamos el módulo volumétrico *adiabático* (sin transferencia de calor). En gases típicos, el módulo volumétrico adiabático es de alrededor de 1.4 veces el módulo volumétrico isotérmico. Los procesos isotérmicos y adiabáticos se estudian con mayor detalle en el capítulo 25.

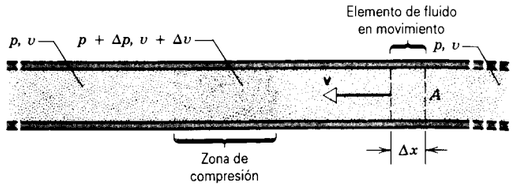


Figura 2 Una pulsación (compresión) se envía a través de un tubo largo. Se elige que el marco de referencia de esta figura sea el de la pulsación, de modo que el fluido corre de derecha a izquierda. Una rebanada de fluido de ancho Δx se mueve hacia la zona de compresión con velocidad v.

Para simplificar suponemos que la pulsación tiene caras anterior y posterior bien definidas y que tiene una presión y una densidad uniformes en su interior. Cuando analizábamos el movimiento de una pulsación transversal en una cuerda tensa en la sección 19-4, hallamos conveniente elegir un marco de referencia en el que la pulsación permaneciese estacionaria. Como lo indicamos en la figura 2, aquí lo hacemos así también. En esa figura, la pulsación (llamada "zona de compresión") permanece estacionaria en nuestro marco de referencia mientras que el fluido se mueve a través de ella de derecha a izquierda con velocidad v.

Sigamos el movimiento del elemento de fluido móvil contenido entre las líneas verticales en la figura 2. Este elemento se mueve hacia la izquierda con velocidad v hasta que choca con la zona de compresión. El borde izquierdo del elemento de fluido entra a la zona de compresión en el tiempo t, y el borde derecho entra en el tiempo $t + \Delta t$. El intervalo de tiempo Δt depende del ancho Δx del elemento de acuerdo con $\Delta t = \Delta x/v$.

Durante el intervalo Δt, en que el elemento entra a esta zona, existe una presión $p + \Delta p$ en la cara anterior del elemento de fluido y una presión p en la cara posterior. Como resultado de la diferencia de presión Δp a través del elemento de fluido, se comprime y se decelera. Dentro de la zona, el elemento se mueve con una velocidad más baja $v + \Delta v$, siendo la cantidad Δv negativa. El elemento emerge finalmente de la cara izquierda de la zona, donde se expande hasta su volumen original y se acelera de nuevo a su velocidad original v como resultado del diferencial de presión Δp.

Apliquemos las leyes de Newton al elemento de fluido durante el intervalo de tiempo Δt durante el cual entra en la zona. La fuerza resultante que actúa durante este intervalo es

$$F = pA - (p + \Delta p)A = -\Delta p\, A, \tag{3}$$

donde A es el área de la sección transversal del tubo. Aquí hemos considerado que la dirección positiva es la de la velocidad, es decir, hacia la izquierda en la figura 2. El volumen original V del elemento es $A\,\Delta x = A\,v\,\Delta t$, y su masa es $\rho v A\,\Delta t$, donde ρ es la densidad sin perturbación del fluido afuera de la zona de compresión. La aceleración a es $\Delta v/\Delta t$, y puesto que Δv es negativa, a es negativa. La segunda ley de Newton da entonces

$$F = ma$$
$$-\Delta p\, A = (\rho v A\,\Delta t)\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

la cual podemos escribir como:

$$\rho v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta v/v}. \tag{4}$$

Durante el intervalo Δt, el borde anterior del elemento de fluido se mueve con velocidad $v + \Delta v$, y por tanto se mueve una distancia $(v + \Delta v)\Delta t$. En ese mismo tiempo, el borde posterior se mueve una distancia $v\,\Delta t$. El ancho del elemento de fluido cambia entonces en ese intervalo en una cantidad negativa $\Delta v\,\Delta t$, y el volumen cambia en correspondencia en la cantidad $\Delta V = A\,\Delta v\,\Delta t$. De aquí que

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\,\Delta v\,\Delta t}{Av\,\Delta t} = \frac{\Delta v}{v}$$

y obtenemos, usando la ecuación 1,

$$\rho v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V} = B. \tag{5}$$

Entonces

$$v = \sqrt{B/\rho}, \tag{6}$$

lo cual demuestra que la constante C de la ecuación 2 tiene el valor 1.

Si el medio en el que viaja la pulsación es una barra delgada y sólida en vez de un fluido, el módulo volumétrico B de la ecuación 6 debe ser reemplazado por el módulo de Young (véase la sección 14-5). Si el sólido es extenso, debemos tener en cuenta el hecho de que un sólido ofrece una resistencia elástica a las fuerzas tangenciales o cortantes, y la velocidad de las ondas longitudinales depende del módulo cortante al igual que del módulo volumétrico. (Tanto las ondas longitudinales como las transversales pueden propagarse en un sólido extenso. Aquí consideraremos únicamente las ondas longitudinales.) La tabla 1 ofrece algunos valores representativos de la velocidad del sonido en diversos medios.

TABLA 1 LA VELOCIDAD DEL SONIDO†

Medio	*Velocidad (m/s)*
Gases	
Aire (0° C)	331
Aire (20° C)	343
Helio	965
Hidrógeno	1284
Líquidos	
Agua (0° C)	1402
Agua (20° C)	1482
Agua de mar‡	1522
Sólidos	
Aluminio	6420
Acero	5941
Granito	6000

† A 0° C y 1 atm de presión, a menos que se indique lo contrario.
‡ A 20° C y 3.5% de salinidad.

20-2 ONDAS VIAJERAS LONGITUDINALES

Consideremos un tren continuo de compresiones y enrarecimientos que viajan a lo largo de un tubo lleno de fluido, como en la figura 3. Si nos colocamos en alguna posición fija a lo largo del tubo, existen dos formas de observar esta onda viajera. (1) Podemos enfocar nuestra atención al *desplazamiento* oscilatorio hacia atrás y hacia adelante de un elemento de fluido en nuestra posición al pasar la onda a través de ella. (2) Por otra parte, podemos centrarnos en las variaciones periódicas de *presión* que ocurren en nuestro punto de observación. En esta sección exploraremos la conexión entre estas descripciones de una onda sonora como una onda de desplazamiento y una onda de presión.

Al avanzar la onda a lo largo del tubo, cada pequeño elemento de volumen del fluido oscila respecto a su posición de equilibrio. El desplazamiento es hacia la derecha o hacia la izquierda a lo largo de la dirección de propagación de la onda, la cual hemos considerado en dirección x positiva. Representamos al desplazamiento del elemento de volumen a partir de su posición de equilibrio en x (nuestro lugar de observación) por $s(x, t)$. Esta función es análoga al desplazamiento transversal $y(x, t)$ estudiado en el capítulo 19, con una excepción importante: el desplazamiento s es *a lo largo de la dirección de propagación* en una onda longitudinal, mientras que en una onda transversal el desplazamiento y es en *ángulo recto con la dirección de la propagación*. En el caso de una onda sinusoidal, podemos escribir, por lo tanto, la ecuación del desplazamiento longitudinal como:

$$s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t), \tag{7}$$

donde hemos supuesto que la onda viaja en dirección positiva x. También hemos hecho una elección particular de la constante de fase para la onda de desplazamiento, lo cual nos permite expresarla en términos de función coseno. La amplitud s_m es bastante pequeña en las ondas sonoras: véase el problema muestra 1.

Por lo general, es más recomendable tratar con variaciones de presión en una onda sonora que con los desplazamientos reales de las partículas. Escribamos por lo tanto

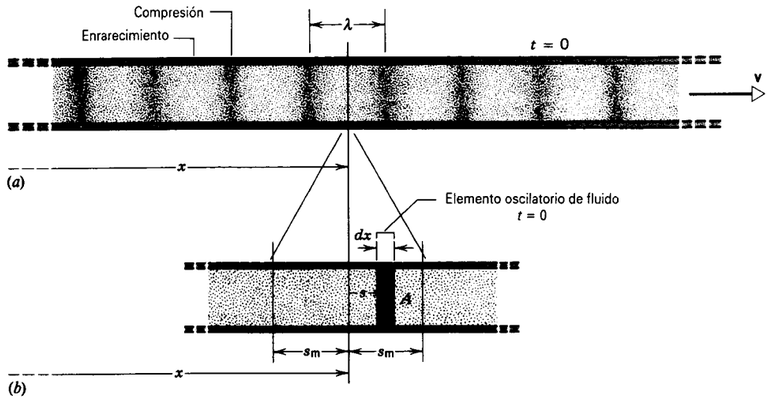


Figura 3 (*a*) Instantánea, tomada en $t = 0$, de una onda sonora sinusoidal que se mueve con velocidad v a través de un tubo largo lleno de fluido. (*b*) Vista ampliada de una región cercana a la posición x. Un elemento de fluido oscila respecto a su posición de equilibrio al pasar la onda a través de él. En el momento que se ilustra, el plano central del elemento se halla desplazado una distancia s de su posición de equilibrio.

la ecuación de la onda en términos de la variación de presión en lugar de hacerlo en términos del desplazamiento.

De la ecuación 1, podemos escribir

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}.$$

Igual que hicimos que s representara el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio, hagamos ahora que Δp represente el *cambio* desde la presión p_0 no perturbada. Buscamos una expresión del cambio de presión Δp en función de la posición x y del tiempo t, es decir, $\Delta p\ (x, t)$. La presión real en cualquier punto será entonces $p_0 + \Delta p(x, t)$, que podría ser mayor o menor que p_0 dependiendo de si Δp es positiva o negativa en ese punto y en ese momento.

Una capa de fluido a presión p_0 con un espesor Δx y un área A en su sección transversal tiene un volumen $V = A\ \Delta x$. Cuando la presión cambia, el volumen cambia en $A\ \Delta s$, donde Δs es la cantidad en que cambia el espesor de la capa durante la compresión o el enrarecimiento. De aquí que

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{A\ \Delta s}{A\ \Delta x}.$$

Cuando hacemos que $\Delta x \to 0$ de modo que la capa de fluido se contraiga hasta un espesor infinitesimal, obtenemos

$$\Delta p = -B\frac{\partial s}{\partial x}. \tag{8}$$

Hemos empleado una notación de derivada parcial porque s es una función tanto de x como de t. Si el desplazamiento de la partícula es sinusoidal, entonces, según la ecuación 7, obtenemos

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -ks_m \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$

y de la ecuación 8

$$\Delta p(x, t) = Bks_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{9}$$

De aquí que la variación de la presión en cada posición x sea también sinusoidal.

A causa de que $v = \sqrt{B/\rho}$, podemos escribir la ecuación 9 más convenientemente como:

$$\Delta p(x, t) = [k\rho v^2 s_m] \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{10}$$

Recordemos que Δp representa el cambio a partir de la presión p_0 no perturbada. El término entre corchetes representa el cambio *máximo* de la presión y se denomina *amplitud de la presión*. Si denotamos a ésta por Δp_m, entonces

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \operatorname{sen}(kx - \omega t), \tag{11}$$

donde

$$\Delta p_m = k\rho v^2 s_m. \tag{12}$$

De aquí que una onda sonora pueda considerarse bien como una onda de desplazamiento o bien como una onda de presión. Si la primera se escribe como una función coseno, la otra será una función seno. La onda de desplazamiento está entonces a 90° fuera de fase con la onda de presión. Es decir, cuando el desplazamiento a partir del equilibrio en un punto sea un máximo o un mínimo, la presión en exceso ahí será de cero; cuando el desplazamiento en un punto sea cero, el exceso o deficiencia de presión será ahí un máximo. La ecuación 12 da la relación entre la amplitud de la presión (variación máxima de la presión a partir del equilibrio) y la amplitud del desplazamiento (variación máxima de la posición a partir del equilibrio). Conviene que usted compruebe la consistencia de las dimensiones de cada lado de la ecuación 12.

Si bien hemos descrito a una onda sonora en términos ya sea de una onda de presión o de una onda de desplazamiento, las dos descripciones no son equivalentes, por lo general. Podemos escoger fácilmente entre cualquiera de las dos descripciones sólo cuando una sola onda longitudinal se propaga en una sola dirección. Cuando consideramos la reflexión de una onda sonora en el extremo de un tubo, o cuando superponemos dos ondas sonoras que interfieren en un punto, el uso de la descripción de la onda de desplazamiento puede conducir a errores serios.* Por ejemplo, consideremos dos ondas sonoras que parten de fuentes diferentes (quizá, dos altoparlantes) y que viajan en direcciones diferentes e interfiere en un punto, de modo que una onda da un cambio de presión Δp y la otra $-\Delta p$. Mediante la descripción basada en la presión, esperamos una interferencia completamente destructiva en ese punto, porque las presiones se suman como escalares. Sin embargo, la suma de los desplazamientos (que tienen lugar en las direcciones de viaje de las dos ondas) no da cero, porque son vectores en direcciones diferentes. *Suele ser preferible describir a una onda sonora como una onda de presión* para evitar tales dificultades. Además, como veremos en la sección siguiente, es el cambio de la presión, y no el cambio del desplazamiento, lo que se detecta por el oído y por el micrófono.

Por último, observemos que en esta sección hemos tratado al fluido como un medio continuo. Sin embargo, en un gas los espacios entre las moléculas son grandes (en comparación con el tamaño de las moléculas), y las moléculas se mueven con un movimiento térmico al azar. Las oscilaciones producidas por una onda sonora se superponen a estos movimientos térmicos al azar. El impulso dado a una molécula se transmite a otra molécula luego de que la primera se mueve en el espacio vacío entre ellas y choca con la segunda. Existe entonces una conexión íntima entre la velocidad molecular promedio en un fluido y la velocidad del sonido en ese fluido. En particular, al aumentar la temperatura, la velocidad molecular promedio y la velocidad del sonido en un gas crecen exactamente de la misma manera.

Problema muestra 1 La variación máxima de presión Δp_m que puede tolerar el oído humano en sonidos fuertes es de alrededor de 28 Pa a 1000 Hz. El sonido más débil que puede captar el oído a 1000 Hz tiene una amplitud de presión de alrededor de 2.8×10^{-5} Pa. Halle las amplitudes de desplazamiento correspondientes.

Solución Partiendo de la tabla 1, $v = 343$ m/s en el aire a la temperatura ambiente, de modo que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi \times 10^3\ \text{Hz}}{343\ \text{m/s}} = 18.3\ \text{rad/m}.$$

La densidad del aire en estas condiciones es de 1.21 kg/m³. De aquí que, para $\Delta p_m = 28$ Pa, obtengamos, usando la ecuación 12,

$$s_m = \frac{\Delta p_m}{k\rho v^2} = \frac{28\ \text{Pa}}{(18.3\ \text{rad/m})(1.21\ \text{kg/m}^3)(343\ \text{m/s})^2}$$
$$= 1.1 \times 10^{-5}\ \text{m}.$$

Las amplitudes del desplazamiento para los sonidos más fuertes son de alrededor de 10^{-5} m, realmente un valor muy pequeño. Para los sonidos más débiles, obtenemos de manera similar

$$s_m = \frac{2.8 \times 10^{-5}\ \text{Pa}}{(18.3\ \text{rad/m})(1.21\ \text{kg/m}^3)(343\ \text{m/s})^2} = 1.1 \times 10^{-11}\ \text{m}.$$

Esto es de alrededor de un décimo del radio de un átomo típico y sugiere cuán sensible debe ser el oído para detectar vibraciones de una amplitud tan pequeña.

20-3 POTENCIA E INTENSIDAD DE LAS ONDAS SONORAS

Seguiremos los métodos del capítulo 19 para calcular la potencia liberada por una onda sonora, siendo ahora la principal diferencia que la velocidad **u** de la partícula es a lo largo de la dirección de la onda. Al viajar la onda de presión, cada elemento de fluido ejerce una fuerza sobre el elemento que está adelante de él; la magnitud de la fuerza neta es $F = A\ \Delta p$, donde A es el área de la sección transversal del elemento de fluido. Usando la ecuación 11 para Δp, hallamos que la fuerza es

$$F = A\ \Delta p_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{13}$$

La velocidad de la delgada rebanada de fluido, como se indica en la figura 3, es

$$u = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m[-\operatorname{sen}(kx - \omega t)]. \tag{14}$$

La potencia abastecida al elemento de fluido es

$$P = uF = A\omega\ \Delta p_m\ s_m \operatorname{sen}^2(kx - \omega t). \tag{15}$$

Usando la ecuación 12, podemos escribir esto como:

$$P = \frac{A(\Delta p_m)^2}{\rho v} \operatorname{sen}^2(kx - \omega t). \tag{16}$$

Como lo hicimos en el capítulo 19 para el caso de una onda transversal que viaja a lo largo de la cuerda, prome-

* Para un estudio cuidadoso de este punto, véase "Pressure and Displacement in Sound Waves", por C. T. Tindle, *American Journal of Physics*, septiembre de 1984, pág. 749.

diamos la potencia dentro de un ciclo; puesto que el valor promedio de $\text{sen}^2\,\theta$ es $\frac{1}{2}$, la potencia promedio es

$$\bar{P} = \frac{A(\Delta p_m)^2}{2\rho v}. \tag{17}$$

Como en el caso de la onda transversal, la potencia depende del *cuadrado* de la amplitud, en este caso la amplitud de presión. Obsérvese también que la frecuencia no aparece explícitamente en la ecuación 17 (aunque aparecería si, en cambio, expresáramos la potencia promedio en términos de la amplitud del desplazamiento). De aquí que, midiendo las amplitudes de presión, podamos comparar directamente las intensidades de los sonidos que tienen frecuencias *diferentes*. Por esta razón, los instrumentos que miden los cambios de presión son preferibles a los que miden los desplazamientos; además, como lo aprendimos en el problema muestra 1, los desplazamientos de los sonidos audibles más débiles son muy pequeños y sería difícil medirlos directamente.

Cuando comparamos sonidos diferentes, es más útil usar la *intensidad* (la potencia promedio por unidad de área) de la onda. Partiendo de la ecuación 17, podemos obtener de inmediato la intensidad I:

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{(\Delta p_m)^2}{2\rho v}. \tag{18}$$

Puesto que el oído es tan sensible (es capaz de responder a intensidades dentro de un intervalo de 12 órdenes de magnitud), introducimos una escala logarítmica de intensidades llamada *nivel de sonido SL* (de *sound level*)

$$SL = 10 \log \frac{I}{I_0}. \tag{19}$$

El SL se define respecto a una intensidad de referencia I_0, la cual se escoge igual a 10^{-12} W/m^2 (valor típico del umbral de la audición humana). Los niveles de sonido definidos de esta manera se miden en unidades de *decibel* (dB). Un sonido de intensidad I_0 tiene un nivel de sonido de 0 dB, mientras que el sonido en la parte superior del espectro de audición humana, llamada umbral del dolor, tiene una intensidad de 1 W/m^2 y un SL de 120 dB. Cada aumento de la intensidad I multiplicada por un factor de 10 corresponde a añadir 10 dB al SL.

Podemos usar también el dB como una medida *relativa* para comparar diferentes sonidos entre sí, en lugar de usar la intensidad de referencia. Supongamos que deseamos comparar dos sonidos de intensidades I_1 e I_2:

$$SL_1 - SL_2 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} - 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{I_1}{I_2}. \tag{20}$$

Por ejemplo, dos sonidos, cuya razón de intensidades sea 2, difieren en SL en 10 log 2 = 3 dB.

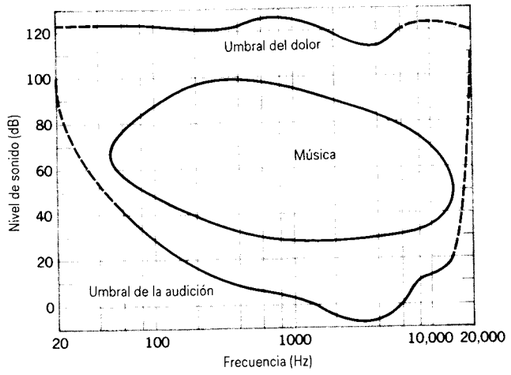


Figura 4 Banda promedio de los niveles de sonido de la audición humana. Observe la dependencia de los niveles de umbral de la frecuencia. Un sonido que apenas podamos oír a 100 Hz debe tener 1000 veces la potencia acústica (un nivel de sonido de 30 dB mayor) que uno que apenas podamos oír a 1000 Hz, porque nuestro oído es mucho menos sensible a 100 Hz.

La sensibilidad del oído humano varía con la frecuencia. El umbral de 10^{-12} W/m^2 se aplica únicamente en las frecuencias intermedias de alrededor de 1000 Hz. A frecuencias más elevadas, digamos 10,000 Hz, el umbral se eleva a alrededor de 10 dB (10^{-11} W/m^2), mientras que a una frecuencia más baja de 100 Hz el umbral está en unos 30 dB (10^{-9} W/m^2). Se necesitan 1000 veces la intensidad del sonido a 100 Hz para producir la misma respuesta fisiológica que una intensidad de sonido dada a 1000 Hz. La figura 4 muestra la variación con la frecuencia de los umbrales de la audición y del dolor, y la tabla 2 muestra algunos niveles de sonido representativos y sus intensidades correspondientes.

Problema muestra 2 Se emiten ondas de sonido esféricas uniformemente en todas direcciones a partir de una fuente puntual, siendo de 25 W la potencia irradiada P. ¿Cuáles son la intensidad y el nivel de sonido de la onda de sonido a una distancia r = 2.5 m desde la fuente?

Solución Toda la potencia irradiada P debe pasar a través de una esfera de radio r centrada en la fuente. Entonces

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Vemos que la intensidad del sonido disminuye con el inverso del cuadrado de la distancia desde la fuente. Numéricamente, tenemos que

$$I = \frac{25 \text{ W}}{(4\pi)(2.5 \text{ m})^2} = 0.32 \text{ W/m}^2$$

TABLA 2 ALGUNAS INTENSIDADES Y NIVELES DE SONIDO

Sonido	*Intensidad* (W/m^2)	*Intensidad relativa* (I/I_0)	*Nivel de sonido* (dB)
Umbral de la audición	1×10^{-12}	10^0	0
El murmullo de las hojas	1×10^{-11}	10^1	10
Un murmullo (a 1 m)	1×10^{-10}	10^2	20
Calle de la ciudad, sin tránsito	1×10^{-9}	10^3	30
Oficina, aula	1×10^{-7}	10^5	50
Conversación normal (a 1 m)	1×10^{-6}	10^6	60
Martillo perforador (a 1 m)	1×10^{-3}	10^9	90
Grupo de rock	1×10^{-1}	10^{11}	110
Umbral del dolor	1	10^{12}	120
Motor de propulsión a chorro (a 50 m)	10	10^{13}	130
El cohete Saturno (a 50 m)	1×10^8	10^{20}	200

y

$$SL = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0.32 \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 115 \text{ dB}.$$

Una comparación de este resultado con la tabla 2 sugiere el planteamiento de dudas acerca de la cordura de comprar amplificadores de 100 W para uso en el hogar.

20-4 ONDAS LONGITUDINALES ESTACIONARIAS

Consideraremos ahora lo que sucede cuando una onda sonora como la mostrada en la figura 1 llega al extremo del tubo. En analogía con la onda transversal de la cuerda (véase la figura 22 del capítulo 19), ocurre una reflexión, y la onda reflejada viaja de regreso por el tubo en dirección opuesta. El comportamiento de la onda en el extremo reflejante depende de si el extremo del tubo está abierto o cerrado.

Consideremos primero un tubo cerrado por un extremo. Al viajar la onda por el tubo y llegar al extremo, puede comprimir a las capas de aire en el extremo cerrado contra la barrera fija. En ese extremo, la presión puede por lo tanto variar con su amplitud máxima, y *el extremo cerrado es un antinodo de presión*. En un extremo cerrado una onda de presión se refleja de manera similar en que se refleja una onda de desplazamiento transversal en el extremo libre de una cuerda (Fig. 22*b* del capítulo 19). Si, por ejemplo, una compresión incide sobre el extremo cerrado, se refleja de regreso a lo largo del tubo como una compresión. En analogía con nuestra discusión de las ondas transversales en las cuerdas, decimos que *una onda de presión longitudinal se refleja desde un extremo cerrado sin cambiar de fase*. El mismo efecto ocurre en el caso de una onda longitudinal que viaje en una cuerda, como puede ser en un juguete *Slinky*, y se refleje a partir del extremo *fijo*: una compresión se refleja como una compresión.

Consideremos ahora lo que sucede si el extremo del tubo está abierto. La presión en el extremo abierto del tubo es la misma que la presión del ambiente p_0 en el salón que lo rodea. No podemos cambiar la presión en ese extremo del tubo a menos que cambiemos la presión en todo el salón. La presión en el extremo abierto permanece por lo tanto en el valor p_0, y *el extremo abierto es un nodo de presión*. La comparación con la figura 22 del capítulo 19 muestra que este caso es análogo a la onda de desplazamiento transversal que se refleja en el extremo fijo de la cuerda. El intento de la onda incidente sobre el extremo abierto de comprimir el aire en ese extremo causa un enrarecimiento, el cual viaja de regreso por el tubo en dirección opuesta. Así, *una onda de presión longitudinal se refleja en el extremo abierto con un cambio de fase de 180°*. Una vez más puede observarse el mismo efecto en un resorte enrollado: una compresión se refleja como un enrarecimiento.

Supongamos ahora que tenemos un tren de ondas sinusoidales que viaja por el tubo. Las ondas se reflejan en el extremo, el cual se comportará ya sea como un nodo de presión (si el extremo está abierto) o bien como un antinodo de presión (si el extremo está cerrado). Supongamos que la fuente del tren de ondas sea un altoparlante en el extremo opuesto. El movimiento de la bocina envía una onda de compresión por el tubo, y la superposición de las ondas original y reflejada produce un patrón de ondas estacionarias, precisamente como en el caso de las ondas transversales en la cuerda. Dentro del tubo habrá un patrón de nodos y antinodos de presión (que no son puntos, como en el caso de las ondas transversales en una cuerda, sino planos).

Si se elige que la frecuencia (o la longitud de onda) de la fuente de ondas tenga un valor particular que dependa de la longitud del tubo, entonces se establece un patrón de ondas estacionarias a lo largo de todo el tubo, en analogía

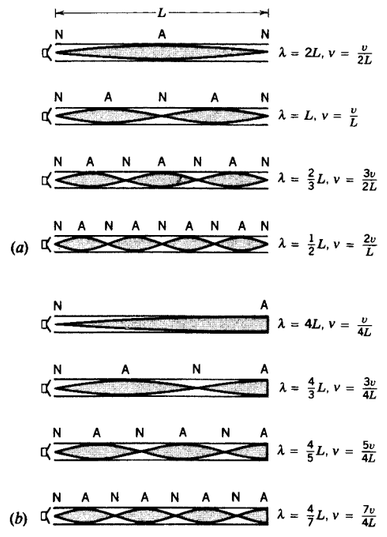


Figura 5 (*a*) Ondas de presión de los primeros cuatro modos resonantes de un tubo impulsado por una bocina y abierto en el otro extremo. Existe un nodo N de presión en cada extremo, y los antinodos A se ubican entre los nodos. Las curvas sugieren la variación sinusoidal de presión dentro del tubo. (*b*) Ondas de presión de los primeros cuatro modos resonantes de un tubo que está cerrado en un extremo. El extremo cerrado es un antinodo de presión. Obsérvense las diferencias en los patrones vibratorios y en las longitudes de onda entre los tubos abierto y cerrado.

con el caso de los patrones de una onda estacionaria mostrados en la figura 23 del capítulo 19. Si existe un nodo de presión en el extremo de la bocina, entonces se regresa poca energía a la bocina a partir del patrón de onda estacionaria dentro del tubo, y tenemos una condición de resonancia. La frecuencia impulsora debe ser igual a una de las frecuencias naturales del sistema, las cuales están determinadas por la longitud del tubo.

La figura 5*a* muestra un tubo impulsado por una bocina en un extremo y abierto en el otro extremo. Como vimos previamente, el extremo de la bocina es un nodo de presión en resonancia y el extremo abierto es igualmente un nodo de presión. En la figura 5*a* se muestran las variaciones de la amplitud de presión resultantes de las ondas estacionarias.* Estos patrones se parecen mucho a los de la figura 23 del capítulo 19. En el primer modo de oscilación, la longitud L del tubo es igual a $\lambda/2$, donde λ es la longitud de onda de la onda producida por la bocina en esta condición de resonancia en particular. La longitud de onda es por lo tanto $2L$, y la frecuencia correspondiente es $v = v/\lambda = v/2L$. Las otras resonancias que se muestran en la figura 5*a* tienen longitudes de onda más pequeñas en forma sucesiva, lo cual puede escribirse en general como:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{21}$$

Las frecuencias de resonancia correspondientes, determinadas al usar la expresión $v = v/\lambda$ con las longitudes de onda de arriba, son

$$v_n = n\frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ (tubo abierto)}. \tag{22}$$

Aquí v representa la velocidad de la onda en el medio que llena el tubo, usualmente aire.

La figura 5*b* muestra el caso en que el tubo está cerrado en un extremo y abierto en el otro. En este caso, el extremo cerrado debe ser un antinodo de presión. En el primer modo resonante, la longitud L del tubo es $\frac{1}{4}\lambda$, y así la fuente debe estar produciendo una onda cuya longitud de onda es $4L$. En el modo siguiente, la longitud de onda cambia de modo que ahora L es $\frac{3}{4}\lambda$, y entonces $\lambda = \frac{4}{3}L$. Al continuar la serie, vemos que en este caso la expresión general para las longitudes de onda de los modos resonantes es

$$\lambda_n = \frac{4L}{n}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots . \tag{23}$$

Nótese que sólo aparecen los valores impares del entero n en este caso. Las frecuencias resonantes correspondientes son

$$v_n = n\frac{v}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \text{ (tubo cerrado)}. \tag{24}$$

Como lo estudiaremos en la sección siguiente, las frecuencias resonantes dadas por las ecuaciones 22 ó 24 determinan las notas musicales tocadas por los instrumentos de aliento.

La ubicación real del nodo de presión en un extremo abierto no está *exactamente* en el extremo del tubo. La onda se extiende ligeramente en el medio más allá del tubo, así que la verdadera longitud del tubo es un poco mayor y las frecuencias resonantes son un poco menores. En tubos angostos de forma cilíndrica, la corrección de la longitud es aproximadamente igual a $0.6R$, donde R es el radio del tubo. En un tubo abierto en ambos extremos, la corrección de la longitud debe aplicarse en cada extremo. En un tubo de 0.6 m de longitud y 1 cm de radio (valores típicos para los instrumentos de aliento más pequeños, como el clarinete o la flauta), la frecuencia más baja sin la corrección del extremo sería de 286 Hz si el tubo fuese abierto y de 143 Hz si el tubo fuese cerrado. Con la corrección del extremo, los valores correspondientes serían de 280 Hz y 142 Hz. Las correcciones son pequeñas, y sin embargo muy importantes.

* Con un tubo de llama Rubens puede obtenerse una bella demostración de las ubicaciones de los nodos y antinodos de presión. Véase "Rubens Flame-tube Demonstration", por George W. Ficken y Francis C. Stephenson, *The Physics Teacher*, mayo de 1979, pág. 306.

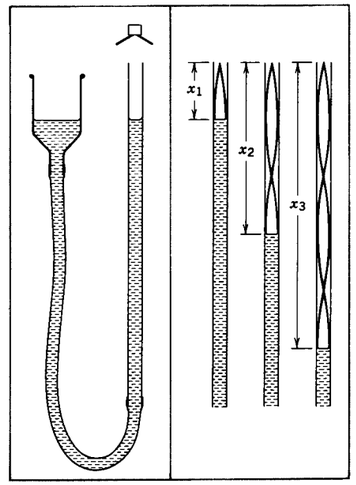


Figura 6 Problema muestra 3. Aparato para medir la velocidad del sonido en el aire. El nivel del agua puede ajustarse elevando o bajando el recipiente de la izquierda, el cual está conectado al tubo por medio de una manguera. A la derecha se muestran las formas de la onda de presión de los primeros tres modos resonantes para una longitud de onda determinada.

Problema muestra 3 La figura 6 muestra un aparato que puede emplearse para medir la velocidad del sonido en el aire usando la condición de resonancia. Encima de un tubo cilíndrico parcialmente lleno de agua se sostiene una pequeña bocina. Al ajustar el nivel de agua, la longitud de la columna de aire puede cambiarse hasta que el tubo esté en resonancia, en cuyo punto puede oírse un incremento en la intensidad del sonido. En un experimento, la bocina se impulsa a una frecuencia fija de 1080 Hz, y se observan tres resonancias cuando el nivel de agua está a las distancias $x_1 = 6.5$ cm, $x_2 = 22.2$ cm, y $x_3 = 37.7$ cm por debajo de la parte superior del tubo. Halle el valor de la velocidad del sonido a partir de estos datos.

Solución La columna de aire actúa como un tubo de longitud variable cerrado en un extremo. El patrón de ondas estacionarias muestra un nodo de presión cerca de la bocina y un antinodo de presión en la superficie del agua. Puesto que no conocemos la corrección del extremo, no podemos usar directamente los datos dados para hallar la velocidad del sonido a partir de la ecuación 24. Sin embargo, observamos por las condiciones de resonancia mostradas en la figura 5*b* que la distancia entre nodos de presión adyacentes es de $\frac{1}{2}\lambda$; lo mismo sucede para la distancia entre antinodos adyacentes. A partir de los datos dados, concluimos por lo tanto, partiendo de las primeras dos resonancias, que

$$\tfrac{1}{2}\lambda = x_2 - x_1 = 22.2 \text{ cm} - 6.5 \text{ cm} = 15.7 \text{ cm},$$

y similarmente, partiendo de la segunda y tercera resonancias,

$$\tfrac{1}{2}\lambda = x_3 - x_2 = 37.7 \text{ cm} - 22.2 \text{ cm} = 15.5 \text{ cm}.$$

El promedio de estos dos valores, que tomamos como nuestro mejor valor de esta medición, es de 15.6 cm, correspondiente a una longitud de onda de 2(15.6 cm) = 31.2 cm = 0.312 m. Por lo tanto, deducimos que la velocidad del sonido es de

$$v = \lambda v = (0.312 \text{ m})(1080 \text{ Hz}) = 337 \text{ m/s}.$$

Aparte de la corrección del extremo, ¿qué factores físicos de este experimento (incluyendo las propiedades del aire) podrían influir en el valor medido?

20-5 SISTEMAS VIBRATORIOS Y FUENTES DE SONIDO*

Un sistema vibratorio transmite una onda a través del aire hasta los oídos del oyente. Éste es el principio básico de la producción de sonido por medio de la voz o de un instrumento musical. Ya hemos estudiado la propagación de la onda sonora; aquí estudiaremos ahora el sistema vibratorio que la produce para entender la naturaleza del sonido.

Como vimos en la sección 19-10 en el caso de la cuerda vibratoria y en la sección anterior en el caso de una columna de aire, un sistema distribuido tiene un número grande (quizás infinito) de frecuencias vibratorias naturales o de resonancia. Éstas son las frecuencias a las cuales *puede* vibrar. La frecuencia que *se halla* en la vibración depende de cómo se pone el sistema en vibración.

Supongamos que el sistema es capaz de vibrar en un número de frecuencias v_1, v_2, v_3,... . Escribimos éstas en orden ascendente, de modo que $v_1 < v_2 < v_3 < \cdots$. La frecuencia más baja v_1, se llama la *frecuencia fundamental*, y el modo de oscilación correspondiente se llama modo fundamental. Las frecuencias más elevadas se llaman *sobretonos*, siendo v_2 el primer sobretono superior, v_3 el segundo sobretono, y así sucesivamente.

En ciertos sistemas, los sobretonos son todos los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental:

$$v_n = nv_1, \tag{25}$$

donde n es un entero. En tal caso, los sobretonos se llaman simplemente *armónicos*. El primer miembro de una secuencia armónica es el fundamental, el segundo armónico es el primer sobretono, y así sucesivamente.

* Para una lista de referencias sobre la física de los instrumentos musicales y temas relacionados, véase "Resource Letter MA-2: Musical Acoustics", por Thomas D. Rossing, *American Journal of Physics*, julio de 1987, pág. 589.

¿Por qué producen algunos sistemas sonidos agradables mientras que otros producen sonidos desagradables o discordantes? Cuando se oyen varias frecuencias simultáneamente, resulta una sensación agradable si las frecuencias están en razón de números pequeños y enteros tales como 3:2 ó 5:4. Si un sistema produce sobretonos que sean armónicos, sus vibraciones incluirán frecuencias que tienen estas razones, y producirán un sonido agradable. Si los sobretonos no son armónicos, es probable que el sonido resulte discordante. Muchos de los esfuerzos en el diseño de instrumentos musicales están dedicados a la producción de secuencias armónicas de sobretonos. Algunos instrumentos, como en el caso de los basados en cuerdas vibratoria, producen sobretonos que son automáticamente armónicos cuando las vibraciones tienen una amplitud pequeña. En otros casos, la forma del instrumento debe diseñarse cuidadosamente para hacerlo armónico; una campana es un ejemplo de tal instrumento. Los armónicos que produce un instrumento le dan su riqueza y diversidad de tono, y son determinantes de la belleza del sonido del instrumento. Si los instrumentos produjesen únicamente sonidos fundamentales, todos sonarían exactamente igual.

Podemos clasificar a los instrumentos musicales en tres categorías: los basados en cuerdas vibratorias, los basados en columnas de aire vibratorias, y los sistemas más complejos que incluyen platillos, barras, y membranas vibratorias.

Cuerdas vibratorias

Estos instrumentos incluyen las cuerdas frotadas (por ejemplo, los violines), las cuerdas punteadas (la guitarra, el clavicordio), y las cuerdas percutidas (el piano).

Si una cuerda fija en ambos extremos es frotada, punteada, o percutida, a lo largo de la cuerda viajan vibraciones transversales; estas perturbaciones se reflejan en los extremos fijos, y se forma un patrón de onda estacionaria. Los modos naturales de vibración de la cuerda son excitados, y estas vibraciones dan origen a ondas longitudinales en el aire del entorno, el cual los transmite a nuestros oídos en forma de sonido musical.

Hemos visto (sección 19-10) que una cuerda de longitud L, fija en ambos extremos, puede resonar a frecuencias dadas por

$$v_n = n\frac{v}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{26}$$

Aquí v es la velocidad en la cuerda de las ondas que viajan transversalmente de cuya superposición puede pensarse que da origen a las vibraciones; la velocidad v ($= \sqrt{F/\mu}$) es la misma para todas las frecuencias. (Obsérvese que v *no* es la velocidad del sonido en el aire; aunque la ecuación 26 se vea exactamente igual a la ecuación 22, v representa

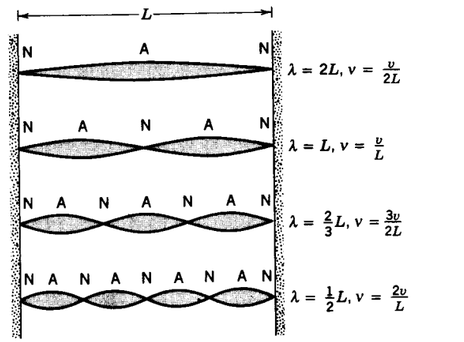


Figura 7 Los primeros cuatro modos resonantes de una cuerda vibratoria fija en ambos extremos. Los nodos y los antinodos de desplazamiento se denotan por N y A, respectivamente.

cantidades diferentes en las dos ecuaciones.) A cualquiera de estas frecuencias la cuerda contiene un número entero n de rizos entre sus extremos; tiene nodos en cada extremo y $n - 1$ nodos adicionales igualmente espaciados a lo largo de su longitud (Fig. 7).

Si la cuerda es inicialmente deformada de modo que su forma sea la misma que *cualquiera* de la de los armónicos posibles, vibrará únicamente a la frecuencia de ese armónico en particular. Sin embargo, las condiciones iniciales suelen surgir de percutir o de frotar la cuerda y en tales casos, no solamente el fundamental sino muchos sobretonos están presentes en la vibración resultante. Tenemos una superposición de varios modos naturales de oscilación. El desplazamiento real es la suma de los varios armónicos con amplitudes diversas. Los impulsos que se envían a través del aire hasta el oído y el cerebro dan lugar a un efecto neto, el cual es característico del instrumento de cuerda en particular. La calidad del sonido de determinada nota (frecuencia fundamental) tocada por un instrumento se define por el número de sobretonos presentes y sus respectivas intensidades. La figura 8 muestra los espectros del sonido y las formas de onda correspondientes al violín y al piano.

Columnas de aire vibratorias

Un tubo de órgano es un ejemplo sencillo de sonido que se origina en una columna de aire vibratoria. Si ambos extremos de un tubo están abiertos y se dirige una corriente de aire contra un borde en un extremo, se forman ondas longitudinales en el tubo. La columna de aire resuena entonces a sus frecuencias de vibración naturales, dadas por la ecuación 22. Como en el caso de la cuerda frotada, el sonido fundamental y los sobretonos (que son armónicos) se producen al mismo tiempo. Si un extremo del tubo se cierra, la frecuencia fundamental se reduce en un medio, con relación a su valor para un tubo abierto de la misma longitud, y únicamente estarán presentes los armónicos impares, los cuales cambian la calidad del sonido. Es decir, un tubo abierto produce el mismo tono fundamental que un tubo cerrado de la mitad de longitud, pero a causa de que la mezcla de los armónicos es diferente en los dos tubos, la calidad de los tonos difiere.

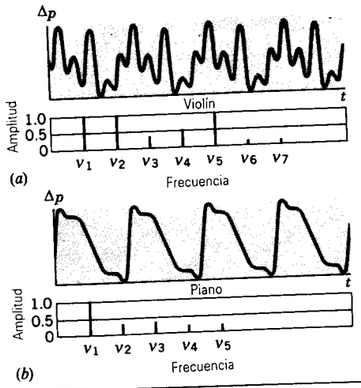


Figura 8 Formas de onda y espectros de sonido de dos instrumentos de cuerda, (*a*) violín, y (*b*) piano; cada uno de ellos toca una nota de frecuencia fundamental v_1 = 440 Hz (la nota La de la escala musical). El espectro del sonido abajo de cada forma de onda muestra los armónicos que están presentes en el tono complejo y sus correspondientes amplitudes.

Los instrumentos de lengüeta, como el clarinete, producen tonos de modo distinto. El aire se sopla a través de una abertura angosta, uno de cuyos lados está cubierto por una lengüeta que tiene propiedades elásticas. Según la ecuación de Bernoulli el aire, al pasar a alta velocidad a través de una abertura angosta, forma una región local de baja presión dentro de la embocadura. La presión exterior supera a la presión interior, lo cual fuerza a la lengüeta hacia adentro de modo que cubre la abertura. Tan pronto como se cubre la abertura, se interrumpe el flujo de aire, se elimina la región de baja presión dinámica, y la lengüeta se abre súbitamente permitiendo que el flujo de aire comience de nuevo. Este abrir y cerrar repetido del conducto de aire causa variaciones de presión máximas en la embocadura del instrumento, el cual se comporta por lo tanto como un antinodo de presión. En un clarinete, el otro extremo del instrumento está abierto, y por lo tanto las resonancias del instrumento son aquellas dadas por la ecuación 24 para un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro. Ciertos instrumentos de aliento, como la flauta, usan un método similar al tubo de órgano para producir el tono, de modo que la embocadura se comporta como un extremo abierto; sus frecuencias resonantes están dadas por la ecuación 22. Otros más, como el oboe y el saxofón, que usan una lengüeta para producir su tono, tienen un barreno cónico (es decir, ahusado) en lugar de cilíndrico, lo cual produce en ellos sobretonos que son aproximadamente armónicos, tanto impares como pares. Los instrumentos de metal (por ejemplo, la trompeta o el trombón) se llaman también instrumentos de *lengüeta labial*, porque los labios del ejecutante actúan como lengüeta, pero de nuevo el barreno está ligeramente ahusado, y como resultado los sobretonos contienen todos los armónicos. La figura 9 muestra las formas de onda de algunos instrumentos de viento.

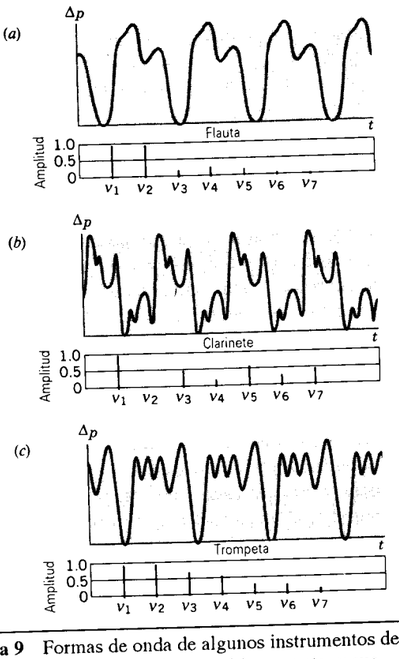


Figura 9 Formas de onda de algunos instrumentos de aliento: (*a*) flauta, (*b*) clarinete, y (*c*) trompeta, y sus espectros de sonido, como en la figura 8. Obsérvese que el espectro del clarinete contiene principalmente armónicos impares, mientras que la flauta y la trompeta tienen armónicos tanto impares como pares.

Otros sistemas vibratorios

Las barras vibratorias, los platillos, y las membranas estiradas producen también ondas sonoras. Consideremos una membrana flexible estirada, como la de un tambor. Si se golpea, a partir del punto golpeado viaja una pulsación

bidimensional que se refleja una y otra vez en la frontera de la membrana. Si se obliga a algún punto de la membrana a vibrar periódicamente, a lo largo de ella viajan trenes continuos de ondas. Como en el caso unidimensional de la cuerda, aquí también pueden establecerse ondas estacionarias en la membrana bidimensional. Cada una de estas ondas estacionarias tiene una cierta frecuencia natural (o característica) de la membrana. Una vez más la frecuencia más baja se llama fundamental, y las otras son sobretonos. Generalmente se presentan muchos sobretonos junto con la frecuencia fundamental cuando la membrana está vibrando. Estas vibraciones pueden excitar ondas sonoras de la misma frecuencia.

Los nodos de una membrana vibratoria son líneas más bien que puntos (como en la cuerda vibratoria) o planos (como en un tubo). Puesto que la frontera de la membrana está fija, debe ser una línea nodal. En la figura 10 se muestra una membrana circular fija en sus bordes, junto con los modos de vibración posibles y sus líneas nodales. La frecuencia natural de cada modo se da en términos de la fundamental ν_1. Las frecuencias de los sobretonos no son armónicos; esto es, no son múltiplos enteros de ν_1. Las barras vibratorias tienen también un juego de frecuencias naturales que no son armónicos. Por esta razón, las barras y los platillos tienen un uso limitado como instrumentos musicales. En instrumentos como el xilófono y la marimba, se ponen en vibración pequeñas barras de madera o de metal que se golpean. La forma de las barras es cuidadosamente modificada, haciéndolas más delgadas en el centro, de modo que los sobretonos resulten aproximadamente armónicos.

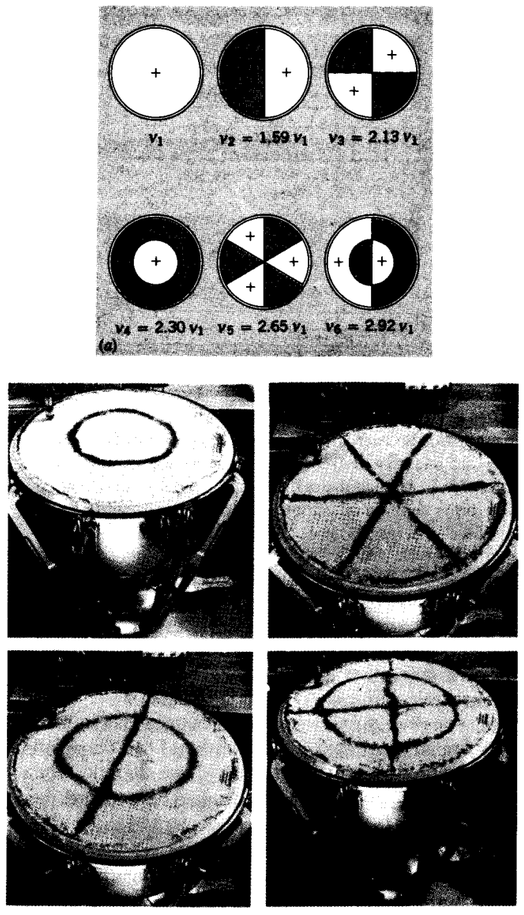


Figura 10 (*a*) Los seis modos resonantes más bajos de un parche circular sujeto en los bordes. Las líneas representan nodos; el borde es también una línea nodal. Los signos + o - indican que una región particular se está moviendo hacia afuera de la página o hacia adentro de la página. En este caso, los sobretonos no son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental y, por lo tanto, no son armónicos. (*b*) Patrones de vibración de un timbal en los modos numerados 4, 5, y 6, y un modo adicional no ilustrado en (*a*). Se hacen visibles esparciendo un polvo oscuro sobre el parche y poniendo a éste en vibración a la frecuencia apropiada usando un vibrador mecánico. Al vibrar el parche, el polvo es sacudido y finalmente reposa sobre las líneas nodales, donde no existe movimiento.

20-6 PULSACIONES

Hemos considerado previamente el efecto de ondas que se superponen para producir regiones de intensidad máxima y mínima (cero), tal como en el caso de una onda estacionaria en un tubo. Esto ilustra un tipo de interferencia que podemos llamar *interferencia en el espacio*.

El mismo principio de superposición nos conduce a otro tipo de interferencia, al cual podemos llamar *interferencia en el tiempo*. En este caso examinamos la superposición de dos ondas en un punto dado en función del tiempo. Esta superposición, que en general puede dar por resultado formas de onda bastante complejas, adquiere una forma sencilla, particularmente cuando las dos ondas tienen casi la misma frecuencia. Con el sonido una condición así se da cuando, por ejemplo, se afinan entre sí dos instrumentos o dos cuerdas de guitarra.

Consideremos un punto en el espacio a través del cual estén pasando ondas. La figura 11*a* muestra la presión producida en ese punto por las dos ondas separadamente, en función del tiempo. Para simplificar hemos supuesto que las dos ondas tienen igual amplitud, aunque esto no es necesario. La presión resultante en ese punto en función del tiempo es la suma de las presiones individuales y su gráfica se ilustra en la figura 11*b*. Vemos que la amplitud de la onda resultante no es constante sino que varía con el tiempo. En el caso del sonido la amplitud variable da lugar a variaciones en la sonoridad, llamadas *pulsaciones*.

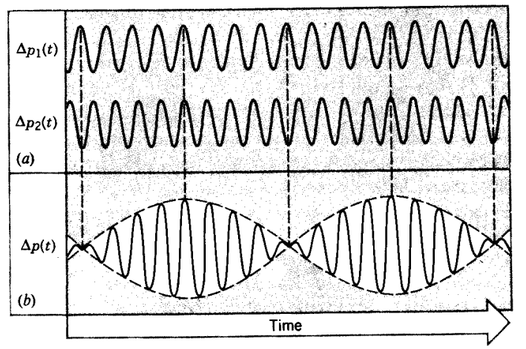


Figura 11 (*a*) Dos formas de onda sinusoidales de frecuencias casi iguales. (*b*) Superposición de las dos formas de onda. Nótese que las dos ondas de la parte (*a*) van de estar en fase, dando una resultante de gran amplitud, a estar fuera de fase, dando una resultante de amplitud cero. Las curvas puntuadas muestran la variación sinusoidal de la envolvente modulante con frecuencia angular ω_{amp}.

Representemos la variación de la presión con el tiempo (para x constante) producida por una onda como:

$$\Delta p_1(t) = \Delta p_m \operatorname{sen} \omega_1 t,$$

donde hemos elegido a la constante de fase para tener la posibilidad de escribir a la onda en esta forma sencilla. La variación de la presión en el mismo punto producida por la otra onda de igual amplitud se representa como

$$\Delta p_2(t) = \Delta p_m \operatorname{sen} \omega_2 t.$$

Según el principio de superposición, la presión resultante es

$$\begin{aligned}\Delta p(t) &= \Delta p_1(t) + \Delta p_2(t) \\ &= \Delta p_m(\operatorname{sen} \omega_1 t + \operatorname{sen} \omega_2 t). \end{aligned} \quad (27)$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A-B}{2} \operatorname{sen} \frac{A+B}{2},$$

La ecuación 27 puede describirse como

$$\Delta p(t) = \left[2\Delta p_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right] \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t. \quad (28)$$

Hasta ahora, todo lo que hemos hecho se aplica a dos ondas cualesquiera, sin importar cuáles sean sus frecuencias. Cuando las frecuencias son casi las mismas, la ecuación 28 puede simplificarse escribiendo el segundo factor en términos de la frecuencia angular promedio $\overline{\omega}$ de las dos ondas,

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (29)$$

El primer factor, contenido entre los corchetes de la ecuación 28, da una amplitud variable con el tiempo a la variación sinusoidal del segundo factor. Este factor de la amplitud varía con una frecuencia angular

$$\omega_{amp} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}. \quad (30)$$

En términos de $\overline{\omega}$ y de ω_{amp}, podemos escribir la ecuación 28 como:

$$\Delta p(t) = [2\Delta p_m \cos \omega_{amp} t] \operatorname{sen} \overline{\omega} t. \quad (31)$$

Si ω_1 y ω_2 son casi iguales, la frecuencia de la amplitud ω_{amp} es pequeña, y la amplitud fluctúa lentamente. La figura 11 muestra la superposición de las dos ondas de acuerdo con la ecuación 28. Obsérvese que, en el caso de frecuencias casi iguales, la variación rápida de la onda resultante ocurre con una frecuencia que es aproximadamente la de cualquiera de las dos ondas sumadas. La amplitud total de la resultante varía lentamente con la frecuencia de la amplitud ω_{amp}, la cual define una "envolvente" dentro de la cual ocurre la variación más rápida. Este fenómeno es una forma de *modulación de la amplitud*, que tiene una contraparte (bandas laterales) en los receptores de radio de AM.

En el caso mostrado en la figura 11*b*, el oído percibiría un tono con una frecuencia $\nu(= \overline{\omega} = /2\pi)$, que es aproximadamente igual que las frecuencias ν_1 $(= \omega_1/2\pi)$ o $\nu_2(= \omega_2/2\pi)$ de las dos ondas componentes. El tono crece alternativamente fuerte y débil al variar con el tiempo la amplitud de la resultante, dando máximos y mínimos como se muestra en la figura 11*b*.

Siempre que cos $\omega_{amp} t$ sea igual a +1 o a -1 ocurre una pulsación, es decir, un máximo de intensidad, puesto que la intensidad depende del *cuadrado* de la amplitud. Cada uno de estos valores ocurre una vez en cada ciclo de la envolvente (véase la fig. 11), de modo que el número de pulsaciones por segundo es el doble del número de ciclos por segundo de la envolvente. La frecuencia angular de la pulsación ω_{puls} es entonces

$$\omega_{puls.} = 2\omega_{amp} = |\omega_1 - \omega_2|. \quad (32)$$

Usando $\omega = 2\pi\nu$, podemos reescribir esta expresión como:

$$\nu_{puls.} = |\nu_1 - \nu_2|. \quad (33)$$

De aquí que *el número de pulsaciones por segundo sea igual a la diferencia de las frecuencias de las ondas componentes*. Las pulsaciones entre dos tonos pueden ser

detectadas por el oído hasta una frecuencia de unos 15 Hz. A frecuencias más elevadas no pueden distinguirse las pulsaciones individuales en el sonido producido. Los músicos tratan de escuchar a menudo las pulsaciones al afinar ciertos instrumentos. La afinación es cambiada hasta que la frecuencia de la pulsación disminuye y las pulsaciones desaparecen.

Problema muestra 4 Una cuerda de violín que va a ser afinada con la nota La de la escala musical (440 Hz) está ligeramente fuera de tono. Se escuchan 3 pulsaciones por segundo cuando la cuerda de violín se toca en su modo fundamental junto con un diapasón en La. (*a*) ¿Cuáles son los valores posibles de la frecuencia fundamental de la cuerda? (*b*) Supóngase que la cuerda fuese tocada en su primer sobretono simultáneamente con un diapasón de una octava arriba de La (880 Hz). ¿Cuántas pulsaciones por segundo se oirían? (*c*) Cuando se aumenta ligeramente la tensión de la cuerda, el número de pulsaciones por segundo en el modo fundamental aumenta. ¿Cuál era la frecuencia original de la fundamental?

Solución (*a*) Partiendo de la ecuación 33, sabemos que la frecuencia ν_1 de la cuerda difiere en la frecuencia de pulsación (3 Hz) de la frecuencia ν_2 del diapasón (440 Hz), pero no podemos decir que la cuerda tenga una frecuencia más alta o más baja a partir únicamente del número de pulsaciones por segundo. Así, las frecuencias posibles son

$$\nu_1 = 440 \text{ Hz} \pm 3 \text{ Hz} = 443 \text{ Hz} \quad \text{or} \quad 437 \text{ Hz}.$$

(*b*) En el primer sobretono, la frecuencia de la cuerda es el doble de su frecuencia fundamental, y por lo tanto, puede ser 886 Hz o bien 874 Hz. Cuando se toca enfrente de un diapasón de 880 Hz, la diferencia de la frecuencia en cualquier caso es de 6 Hz, y por lo tanto se escucharían 6 pulsaciones por segundo.

(*c*) El hecho de aumentar la tensión de la cuerda eleva la velocidad de las ondas transversales y, por lo tanto, eleva la frecuencia fundamental (véase la ecuación 26). Puesto que se nos dice que esto eleva la frecuencia de pulsación, concluimos que la frecuencia del modo fundamental era anteriormente mayor de 440 Hz, puesto que el aumento de la frecuencia hizo que la diferencia con respecto a 440 Hz fuese aún más grande. Entonces, la cuerda estaba afinada originalmente a 443 Hz, y la tensión debe ser reducida para llevarla a su afinación correcta.

20-7 EL EFECTO DOPPLER

Cuando un oyente está móvil hacia una fuente estacionaria de sonido, el tono (frecuencia) del sonido escuchado es más alto que cuando el oyente está en reposo. Si el oyente está móvil alejándose de la fuente estacionaria, se oirá un tono más bajo. Obtenemos resultados similares cuando la fuente está móvil acercándose o alejándose de un oyente estacionario. El tono del silbato de una locomotora o de la sirena de un carro de bomberos es más alto cuando la fuente se aproxima al oyente que cuando ha pasado y se aleja.

En un trabajo escrito en 1842, Christian Johann Doppler (1803-1853, austriaco) llamó la atención sobre el hecho de que el color de un cuerpo luminoso debe ser cambiado por el movimiento relativo del cuerpo y el observador. Este *efecto Doppler*, como se llama, se aplica a las ondas en general. El propio Doppler menciona la aplicación de su principio a las ondas sonoras. En 1845 Buys Ballot llevó a cabo una prueba experimental en Holanda, "usando una locomotora que transportaba a varios trompeteros en un carro abierto".

Observador móvil, fuente en reposo

Consideraremos ahora el efecto Doppler en las ondas sonoras, tratando únicamente el caso especial en el que la fuente y el observador se mueven a lo largo de la línea que los une. Adoptemos un marco de referencia en reposo en el medio a través del cual viaja el sonido. La figura 12 muestra una fuente de sonido S en reposo en este marco y a un observador O que se mueve hacia la fuente con una velocidad v_0. Los círculos representan frentes de onda, separados por la distancia de una longitud de onda, que viaja a través del medio. Un observador en reposo en el medio recibiría vt/λ ondas en el tiempo t, donde v es la velocidad del sonido en el medio y λ es la longitud de onda. Sin embargo, a causa del movimiento hacia la fuente, el observador recibe $v_0 t/\lambda$ ondas adicionales en este mismo tiempo t. La frecuencia ν' que se oye realmente es el número de ondas recibidas por unidad de tiempo, o sea

$$\nu' = \frac{vt/\lambda + v_0 t/\lambda}{t} = \frac{v + v_0}{\lambda} = \frac{v + v_0}{v/\nu}.$$

Esto es,

$$\nu' = \nu \frac{v + v_0}{v} = \nu\left(1 + \frac{v_0}{v}\right). \tag{34}$$

La frecuencia ν' captada por el oído del observador es la frecuencia ν oída en reposo más el incremento $\nu(v_0/v)$ que surge del movimiento del observador. Cuando el observador está móvil *alejándose* de la fuente estacionaria, existe una *disminución* de la frecuencia $\nu(v_0/v)$ correspondiente a las ondas que no llegan al observador en cada unidad de tiempo a causa del alejamiento. Entonces

$$\nu' = \nu \frac{v - v_0}{v} = \nu\left(1 - \frac{v_0}{v}\right). \tag{35}$$

De aquí que la relación general que prevalece cuando la *fuente está en reposo* respecto al medio pero el *observador se mueve* a través de él sea

$$\nu' = \nu \frac{v \pm v_0}{v}, \tag{36}$$

donde el signo más se tiene para el movimiento hacia la fuente y el signo menos se tiene para el movimiento que se aleja de la fuente. Nótese que el cambio de frecuencia ocurre porque el observador intercepta más o menos ondas en cada segundo como resultado del movimiento a través del medio.

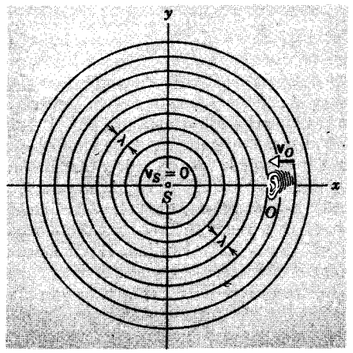


Figura 12 Una fuente estacionaria de sonido S emite frentes de onda esféricos, mostrados con la separación de una longitud de onda. Un observador O, representado por la oreja, se mueve con velocidad v_o hacia la fuente. El observador en movimiento encuentra más ondas por segundo que un observador en reposo y por lo tanto mide una frecuencia más elevada. El observador mediría una frecuencia *más baja* para el movimiento que se aleja de la fuente.

Fuente móvil, observador en reposo

Cuando la fuente está móvil *hacia* un observador estacionario, el efecto es un acortamiento de la longitud de onda (véase la Fig. 13), ya que la fuente está viajando tras las ondas que se aproximan, y, por lo tanto, las crestas se juntan más entre sí. Si la frecuencia de la fuente es ν y su velocidad es v_s, entonces durante cada vibración viaja una distancia v_s/ν, y cada longitud de onda se acorta en esta cantidad. De aquí que la longitud de onda del sonido que llega al observador no sea $\lambda = v/\nu$ sino $\lambda' = v/\nu - v_s/\nu$. La frecuencia del sonido que el observador oye aumenta y está dada por

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_S)/\nu} = \nu \frac{v}{v - v_S}. \tag{37}$$

Si la fuente se mueve *alejándose* del observador, la longitud de onda emitida es v_s/ν mayor que λ, de modo que el observador oye una frecuencia disminuida, es decir,

$$\nu' = \frac{v}{(v + v_S)/\nu} = \nu \frac{v}{v + v_S}. \tag{38}$$

De aquí que la relación general que prevalece cuando el *observador está en reposo* respecto al medio pero la *fuente se mueve* a través de él sea

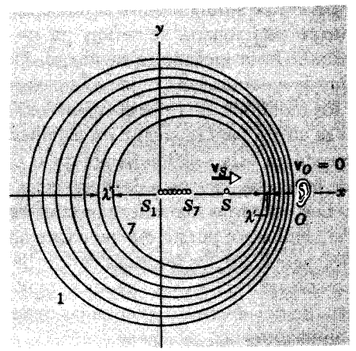


Figura 13 Aquí el observador O está en reposo, y la fuente se mueve hacia él con una velocidad v_s. El frente de onda 1 fue emitido cuando la fuente estaba en S_1, el frente de onda 7 cuando la fuente estaba en S_7, y así sucesivamente. En el instante de esta ilustración, la fuente está en S. El observador mide una longitud de onda más corta a causa del "apiñamiento" de los frentes de onda a lo largo del movimiento. Un observador situado en el eje x negativo, a partir del cual se estaría alejando la fuente, mediría una longitud de onda más larga.

$$\nu' = \nu \frac{v}{v \pm v_S}, \tag{39}$$

donde el signo menos rige para el movimiento hacia el observador y el signo más para el movimiento alejándose del observador. Nótese que el cambio aquí es el acortamiento o el aumento de la longitud de onda transmitida en el medio debido al movimiento de la fuente en el medio.

Si *tanto la fuente como el observador se mueven* en el medio transmisor, puede demostrarse que el observador oye una frecuencia dada por

$$\nu' = \nu \frac{v \pm v_O}{v \mp v_S}, \tag{40}$$

donde los signos superiores (+ en el numerador, - en el denominador) corresponden a la fuente y al observador cuando se acercan, y los signos inferiores cuando se aleja uno del otro. La ecuación 40 incorpora a las cuatro posibilidades distintas, como lo muestra el problema muestra 5. Obsérvese que la ecuación 40 se reduce a la ecuación 36 cuando $v_s = 0$ y a la ecuación 39 cuando $v_0 = 0$, como debe ser.

Si una fuente de sonido se mueve alejándose de un observador y hacia una pared, el observador oye dos notas de frecuencia diferente. La nota oída directamente a partir de la fuente en retroceso baja de tono debido al movimiento. La otra nota se debe a las ondas reflejadas en la pared, y ésta se eleva de tono (porque la fuente se mueve *hacia* la pared, y la pared "oye" la frecuencia más alta). La superposición de estos dos trenes de ondas produce pul-

saciones. Un efecto similar ocurre si una onda que parte de una fuente estacionaria se refleja en un objeto en movimiento. La frecuencia de pulsación puede emplearse para deducir la velocidad del objeto. Éste es el principio básico de los monitores de velocidad por medio de radar, y también se utiliza para rastrear a los satélites.

Lo expuesto en esta sección se aplica al corrimiento Doppler de las ondas sonoras y de otras ondas mecánicas similares. Las ondas de luz muestran también el efecto Doppler; sin embargo, puesto que no existe un medio de propagación para la luz, las fórmulas desarrolladas en esta sección no son aplicables. Véanse los capítulos 21 y 42 para un estudio del efecto Doppler en las ondas de luz.

Problema muestra 5 La sirena de un auto de la policía emite un tono puro a una frecuencia de 1125 Hz. Halle la frecuencia que usted percibiría en su automóvil bajo las siguientes circunstancias: (*a*) su auto está en reposo, el de la policía se mueve hacia usted a 29 m/s (65 mi/h); (*b*) el auto de la policía está en reposo, su auto se mueve hacia él a 29 m/s; (*c*) su auto y el de la policía se mueven uno hacia el otro a 14.5 m/s; (*d*) su auto se mueve a 9 m/s, y el de la policía le sigue a usted a 38 m/s.

Solución Las cuatro partes de este problema pueden resolverse usando la ecuación 40. (*a*) Aquí $v_o = 0$ (su auto está en reposo) y v_s = 29 m/s. Escogemos el signo de arriba (menos) en el denominador de la ecuación 40, porque el auto de la policía se está moviendo hacia usted. Entonces obtenemos, usando v = 343 m/s como la velocidad del sonido en aire tranquilo,

$$\nu' = \nu \frac{v}{v - v_S} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 29 \text{ m/s}} = 1229 \text{ Hz}.$$

(*b*) En este caso $v_s = 0$ (el auto de la policía está en reposo) y v_o = 29 m/s. Escogemos el signo de arriba (más) en el numerador de la ecuación 40, porque usted se mueve hacia el auto de la policía, y hallamos

$$\nu' = \nu \frac{v + v_O}{v} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} + 29 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}} = 1220 \text{ Hz}.$$

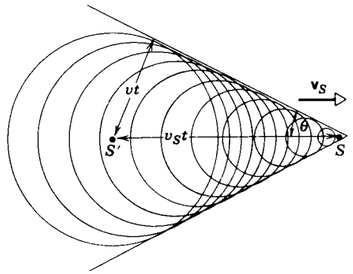
(*c*) En este caso v_s = 14.5 m/s y v_o = 14.5 m/s. Escogemos los signos de arriba tanto en el numerador como en el denominador de la ecuación 40, porque su auto y el de la policía se mueven uno hacia el otro. Entonces obtenemos

$$\nu' = \nu \frac{v + v_O}{v - v_S} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} + 14.5 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 14.5 \text{ m/s}} = 1224 \text{ Hz}.$$

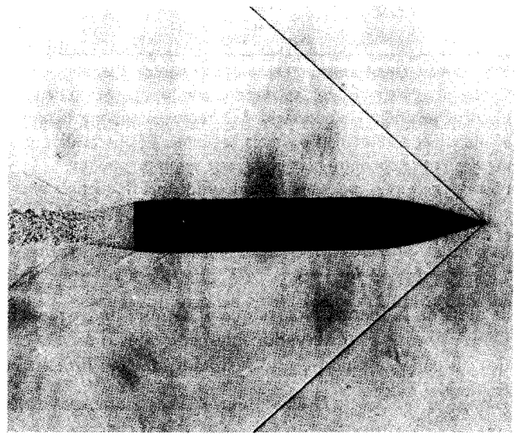
(*d*) Aquí v_o = 9 m/s y v_s = 38 m/s. Su auto se mueve alejándose del auto de la policía, así que elegimos el signo de abajo (menos) en el numerador, pero el auto de la policía se está moviendo *hacia* usted, de modo que elegimos el signo de arriba (menos) en el denominador. El resultado es

$$\nu' = \nu \frac{v - v_O}{v - v_S} = (1125 \text{ Hz}) \frac{343 \text{ m/s} - 9 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 38 \text{ m/s}} = 1232 \text{ Hz}$$

Obsérvese que en los cuatro casos de este problema, la velocidad relativa entre usted y el auto de la policía es la misma, es decir, 29 m/s, pero las frecuencias percibidas son diferentes en los cuatro casos. La desviación Doppler del sonido se determina no sólo por la velocidad relativa entre la fuente y el observador, sino también por sus velocidades relativas al medio que transporta al sonido.



(*a*)



(*b*)

Figura 14 (*a*) Frentes de onda de una fuente que se mueve a velocidad supersónica. Los frentes de onda son esféricos y su envolvente es un cono. Compare esta figura con la figura 13. (*b*) Fotografía de un proyectil disparado por un arma en un Mach 2. Obsérvese el cono Mach.

Efectos a grandes velocidades *(Opcional)*

Cuando v_o o v_s resultan comparables a v en magnitud, las fórmulas dadas antes para el efecto Doppler deben modificarse. Se requiere una modificación, porque la relación lineal entre la fuerza de restauración y el desplazamiento que hasta ahora hemos supuesto ya no es válida en el medio. La velocidad de propagación de la onda ya no es la velocidad de fase normal, y la onda cambia de forma en el tiempo. Las componentes del movimiento en ángulos rectos a la línea que une a la fuente con el observador contribuyen también al efecto Doppler a estas grandes velocidades. Cuando v_o o v_s excede a v, la fórmula Doppler ya no tiene validez; por ejemplo, si $v_s > v$, la fuente se adelanta a la onda en una dirección; si $v_o > v$ y el observador se aleja de la fuente, la onda nunca llega al observador.

Hay muchos ejemplos en los que la fuente se mueve en el medio a una velocidad mayor que la velocidad de fase de la onda en ese medio. En tales casos, el frente de onda toma la forma de un cono en cuyo vértice se halla el cuerpo en movimiento. Otros ejemplos son la onda arqueada de un bote rápido sobre el agua y la "onda de choque" de un aeroplano o proyectil que se mueve por el aire a una velocidad mayor que la del sonido en ese medio (velocidades supersónicas). Otro ejemplo es la radiación Cerenkov, que consiste en ondas de luz emitidas por partículas cargadas que se mueven en un medio con una velocidad mayor que la velocidad de fase de la luz en ese medio. El resplandor azul del agua que a menudo rodea el núcleo de un reactor nuclear es un tipo de radiación Cerenkov.

En la figura 14*a* mostramos las posiciones actuales de las ondas esféricas que se originan en diversas posiciones de una fuente durante su movimiento. El radio de cada esfera en este tiempo es el producto de la velocidad de la onda v y el tiempo t que ha transcurrido desde que la fuente estaba en su centro. La envolvente de estas ondas es un cono cuya superficie forma un ángulo θ con la dirección del movimiento de la fuente. A partir de la figura obtenemos el resultado

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{v}{v_S}. \tag{41}$$

En las ondas que se forman en la superficie del agua el cono se reduce a un par de líneas que se intersecan. En aerodinámica la razón v_s/v se llama el *número Mach*. Un aeroplano que viaje a una velocidad supersónica genera un *cono Mach* similar al mostrado en la figura 14. Cuando el borde de ese cono intercepta al terreno que está abajo, oímos un "estampido sónico", el cual (contrario a la creencia común) *no* tiene nada que ver con el aeroplano que "rompe la barrera del sonido". El estampido sónico es simplemente el efecto total de la concentración sobre una superficie de la energía sónica irradiada por el aeroplano, la cual se irradiaría normalmente en todas direcciones a velocidades subsónicas. Como lo muestra la fotografía de la figura 14*b*, podría ser posible oír dos estampidos sónicos provenientes del mismo aeroplano, uno que partiese del borde anterior y otro que partiese del borde posterior. (Obsérvese también que el cono Mach nunca intercepta al proyectil en sí mismo; así, los pasajeros del aeroplano no oyen el estampido sónico.) ■

PREGUNTAS

1. ¿Por qué no viaja el sonido en el vacío?
2. Liste algunas fuentes de ondas infrasónicas y de ondas ultrasónicas.
3. Las ondas ultrasónicas pueden emplearse para revelar estructuras internas del cuerpo humano. Por ejemplo, pueden distinguir entre los tejidos líquidos y los tejidos blandos del organismo humano mucho mejor que los rayos X. ¿Cómo? ¿Por qué se emplean aún los rayos X?
4. ¿Qué evidencia experimental existe para suponer que la velocidad del sonido en el aire es la misma para todas las longitudes de onda?
5. Ofrezca una explicación cualitativa de por qué la velocidad del sonido en el plomo es menor que en el cobre.
6. Las ondas transversales de una cuerda pueden ser polarizadas planas. ¿Pueden ser polarizadas las ondas de sonido?
7. Las campanas suelen tener un sonido menos agradable que el de un piano o el de un violín. ¿Por qué?
8. En una escuela hacen sonar una campana durante un tiempo corto. Después de un rato su sonido es inaudible. Trace las ondas de sonido y la energía que transfieren a partir del tiempo de emisión hasta que se vuelven inaudibles.
9. Cuando una orquesta "entra en calor", el tono de los instrumentos de aliento se eleva y el de los instrumentos de cuerda decae. Explique por qué.
10. Explique cómo se afina un instrumento de cuerdas.
11. ¿Es la resonancia una característica deseable en todos los instrumentos musicales? Dé ejemplos.
12. Cuando se golpea una de las ramas del diapasón, la otra rama vibra también, incluso cuando se afianza firmemente el mango de la horquilla en un tornillo de banco. ¿Por qué sucede esto? Es decir, ¿cómo "sabe" esa segunda rama de la horquilla que alguien ha golpeado a la otra?
13. ¿Cómo puede viajar una onda de sonido por un tubo de órgano y reflejarse en su extremo abierto? Parecería que allí no existe nada que la refleje.
14. ¿Cómo podemos localizar experimentalmente las posiciones de los nodos y de los antinodos en una cuerda, en una columna de aire, y sobre una superficie vibratoria?
15. Explique cómo se produce una nota al soplar a través de la parte superior de un tubo de pruebas. ¿Cuál sería el efecto de soplar más fuerte? ¿Cuál sería el efecto si se elevara a la temperatura del aire que está dentro del tubo de pruebas?
16. ¿Qué podría usted hacer para reducir el nivel de ruido en un taller de máquinas herramienta?
17. Las trompetas para niebla emiten sonidos de tono muy bajo. ¿Con qué objeto?
18. ¿Son siempre audibles como sonido las ondas longitudinales en el aire, cualquiera que sea la frecuencia o la intensidad? ¿Qué frecuencias producirían en una persona la mayor sensibilidad, la mayor tolerancia, y la gama más amplia?
19. ¿Cuál es el objetivo común de las válvulas de un cornetín y de la barra deslizante de un trombón? Un clarín no tiene válvulas. ¿Entonces cómo podemos hacer sonar notas diferentes en él? ¿A qué notas se limita la persona que toca un clarín? ¿Por qué?
20. Explique por qué el arco hace vibrar a una cuerda de violín.
21. ¿Cuál es el significado de cero decibeles? ¿Podría establecerse la intensidad de referencia del sonido audible con el

fin de permitir niveles de sonido negativos en decibeles? De ser así, ¿cómo?

22. Explique los factores que determinan la gama de frecuencias y el timbre de nuestra voz.

23. Explique el origen del sonido en un silbido ordinario.

24. ¿Qué propiedades físicas de una onda sonora corresponden a las sensaciones humanas de tono, sonoridad, y timbre?

25. ¿Cuál es la diferencia entre una nota de violín y la misma nota emitida por la voz humana que nos permite distinguir entre una y otra?

26. ¿Suena nuestra voz al cantar realmente mejor en la regadera? De ser así, ¿cuáles son las razones físicas?

27. Explique el sonido audible producido al rozar el borde de una copa de vino con el dedo húmedo.

28. ¿Oscilaría una cuerda de violín punteada durante un tiempo más largo o más corto si el violín careciera de caja de resonancia? Explique.

29. ¿Es una cuerda de violín frotada por el arco un ejemplo de oscilaciones amortiguadas forzadas? ¿Cómo sonaría la cuerda si no fuese amortiguada?

30. Un tubo puede actuar como filtro acústico, discriminando el paso a través de él de sonidos de frecuencias diferentes de las frecuencias naturales del tubo. El silenciador de un automóvil es un ejemplo. (*a*) Explique cómo trabaja esta clase de filtro. (*b*) ¿Cómo podemos determinar la frecuencia de corte, por debajo de la cual no se transmite el sonido?

31. Exponga los factores que mejoran la acústica en las salas de concierto.

32. ¿Cuál es el efecto de usar un megáfono o de ahuecar las manos delante de la boca para proyectar la voz a distancia?

33. Un relámpago disipa una cantidad enorme de energía y en esencia es instantáneo. ¿Cómo esa energía se transforma en las ondas sonoras del trueno? (Véase "Thunder", por Arthur A. Few, *Scientific American*, julio de 1975, pág. 80.)

34. Las ondas sonoras pueden emplearse para medir la velocidad a la que fluye la sangre por arterias y venas.Explique cómo.

35. Suponga que Jorge silba y que Gloria lo oye. Ella oiría una frecuencia aumentada si estuviese corriendo hacia Jorge o si Jorge estuviese corriendo hacia ella. ¿Son los aumentos de frecuencia iguales en cada caso? Suponga las mismas velocidades al correr.

36. Suponga que, en el efecto Doppler del sonido, la fuente y el receptor están en reposo en algún marco de referencia pero el medio de transmisión (el aire) se está moviendo respecto a este marco. ¿Existirá un cambio en la longitud de onda, o en la frecuencia, recibida?

37. Usted está parado en el centro de una carretera y hacia usted viene un autobús a una velocidad constante, haciendo sonar su claxon. ¿Se eleva, decae, o es constante el tono del claxon a causa del efecto Doppler?

38. ¿Cómo podría emplearse el efecto Doppler en un instrumento para detectar el latido de un corazón fetal? (Tales mediciones se practican rutinariamente; véase "Ultrasound in Medical Diagnosis", por Gilbert D. Devey y Peter N. T. Wells, *Scientific American*, mayo de 1978, pág. 98.)

39. Los murciélagos pueden conocer las características de los objetos (como su tamaño, forma, distancia, dirección, y movimiento) percibiendo la manera en que se reflejan hacia ellos los objetos mediante los sonidos de alta frecuencia que emiten. Exponga cualitativamente cómo afectan cada una de estas características a las ondas de sonido reflejadas. (Véase "Information Content of Bat Sonar Echoes", por J. A. Simmons, D. J. Howell, y N. Suga, *American Scientific*, marzo-abril de 1975, pág. 204).

40. Supongamos que podemos detectar a un objeto por las ondas que rebotan de él (como en el caso del sonar o del radar, por ejemplo) siempre que el objeto sea más grande que la longitud de onda de las ondas. Consideremos luego que los murciélagos y las marsopas pueden emitir ondas sonoras de 100 kHz de frecuencia; sin embargo, los murciélagos pueden detectar objetos tan minúsculos como un insecto y, en cambio, las marsopas únicamente peces pequeños. ¿Por qué la diferencia?

41. ¿Existe un efecto Doppler para el sonido cuando el observador o la fuente se mueven en ángulo recto con la línea que los une? ¿Cómo podemos entonces determinar el efecto Doppler cuando el movimiento tenga una componente en ángulo recto con esa línea?

42. Dos buques con sirenas de vapor del mismo tono las hacen sonar en el puerto. ¿Cabe esperar que ello produzca un patrón de interferencia con regiones de intensidad alta y baja? Si no, ¿por qué no?

43. Un satélite emite ondas de radio de frecuencia constante. Estas ondas se recogen en tierra y se las hace pulsar contra alguna frecuencia estándar. La frecuencia de pulsación se envía luego por un altavoz y uno "oye" las señales del satélite. Describa cómo cambia el sonido a medida que el satélite se aproxima, pasa por encima, y retrocede respecto al detector en tierra.

44. ¿Cómo y en qué difieren los efectos Doppler de la luz y del sonido? ¿En qué aspecto son iguales?

PROBLEMAS

Según sea necesario en los problemas, tome la velocidad del sonido en el aire = 343 m/s y la densidad del aire = 1.21 kg/m³ a menos que se den otros valores.

Sección 20-1 La velocidad del sonido

1. Para diagnosticar y examinar tumores en tejidos blandos se emplea un ultrasonido de 4.50 MHz de frecuencia. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda en el aire de esa onda de sonido? (*b*) Si la velocidad del sonido en el tejido humano es de 1500 m/s, ¿cuál es la longitud de onda de esta onda en el tejido?

2. Si la longitud de onda del sonido es grande en un factor de alrededor de 10 con relación al recorrido libre medio de las moléculas, entonces las ondas de sonido pueden propagarse a través de un gas. En aire a la temperatura ambiente, el recorrido libre medio es de alrededor de 0.1 μm. Calcule la frecuencia por encima de la cual no podrían propagarse las ondas de sonido.

3. La figura 15 muestra una imagen notablemente detallada del transistor de un circuito microelectrónico, formada por un microscopio acústico. Las ondas de sonido tienen una frecuencia de 4.2 GHz. La velocidad de tales ondas en el helio líquido en el que se encuentra sumergido el espécimen es de 240 m/s. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de estas ondas acústicas de frecuencia ultraelevada? (*b*) Los conductores a modo de listón en la figura tienen un ancho de unos 2 μm, aproximadamente. ¿A cuántas longitudes de onda corresponde esta cantidad?

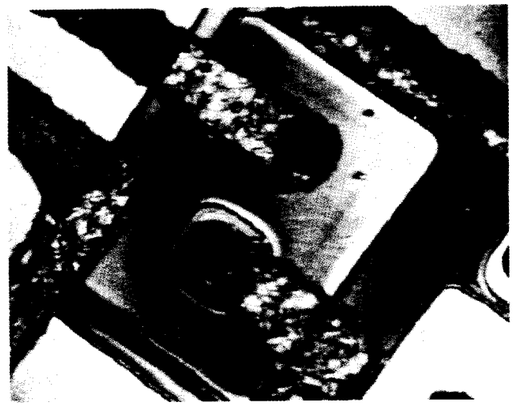


Figura 15 Problema 3.

4. (*a*) Una regla para hallar la distancia a la que se forma un relámpago consiste en contar los segundos a partir del tiempo en que vemos el relámpago hasta que oímos el trueno y luego dividir esa cantidad entre 5. Si el resultado debe dar la distancia en millas. Explique esta regla y determine el porcentaje de error en ella a 0° C y 1 atm de presión. (*b*) Elabore una regla similar para calcular la distancia en kilómetros.

5. Una columna de soldados que marcha a 120 pasos por minuto se mantiene al paso con la música de una banda que encabeza la columna. Se observa que los hombres que van atrás de la columna dan el paso con el pie izquierdo cuando los de la banda lo dan con el pie derecho. ¿Cuál es la longitud de la columna, aproximadamente?

6. Está usted presente en un gran recinto de concierto al aire libre sentado a 300 m del micrófono del escenario. El concierto está siendo radiado en vivo, en estéreo, alrededor del mundo vía satélite. Considere a un oyente a 5000 km de distancia. ¿Quién oye la música primero y con qué diferencia de tiempo?

7. La velocidad del sonido en cierto metal es V. El extremo de un tubo largo de ese metal, de longitud L, se percute con un golpe fuerte. Un oyente en el otro extremo oye dos sonidos, uno que parte de la onda que ha viajado por el tubo y otro que parte de la onda que ha viajado por el aire. (*a*) Si v es la velocidad del sonido en el aire, ¿qué intervalo de tiempo t transcurre entre la llegada de los dos sonidos? (*b*) Un martillo golpea una barra larga de aluminio en un extremo. Un oyente, cuya oreja está cerca del otro extremo de la barra, oye el sonido del golpe dos veces, con un intervalo de 120 ms intermedio. ¿Cuál es la longitud de la barra?

8. Los terremotos generan ondas de sonido en la Tierra. A diferencia de un gas, existen en un sólido ondas de sonido tanto transversales (S) como longitudinales (P). Típicamente, la velocidad de las ondas S es de alrededor de 4.5 km/s y la de las ondas P es de 8.2 km/s. Un sismógrafo registra las ondas P y S de un terremoto. Las primeras ondas P llegan 3 min antes que las primeras ondas S; véase la figura 16. ¿A qué distancia ocurre el terremoto?

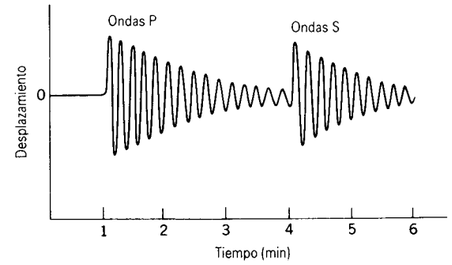


Figura 16 Problema 8.

9. Una piedra se deja caer en un pozo. El sonido del chapoteo se oye 3.00 s más tarde. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

Sección 20-2 Ondas viajeras longitudinales

10. Una onda longitudinal sinusoidal continua se envía a lo largo de un resorte enrollado desde una fuente vibratoria unida a él. La frecuencia de la fuente es de 25 Hz, y la distancia entre enrarecimientos sucesivos en el resorte es de 24 cm. (*a*) Halle la velocidad de la onda. (*b*) Si el desplazamiento longitudinal máximo de una partícula del resorte es de 0.30 cm y la onda se mueve en dirección $-x$, escriba la ecuación de la onda. Considere que la fuente está en $x = 0$ y el desplazamiento es $s = 0$ en la fuente cuando $t = 0$.

11. La presión de una onda sonora viajera está dada por la ecuación

$$\Delta p = (1.48\ \text{Pa})\ \text{sen}\ (1.07\pi x - 334\pi t),$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACIÓN Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

donde x está en metros y t en segundos. Halle (*a*) la amplitud de la presión, (*b*) la frecuencia, (*c*) la longitud de onda, y (*d*) la velocidad de la onda.

Sección 20-3 Potencia e intensidad de las ondas sonoras

12. Demuestre que la intensidad I de la onda de sonido puede expresarse en términos de la frecuencia ν y de la amplitud del desplazamiento s_m en la forma

$$I = 2\pi^2 \rho v \nu^2 s_m^2.$$

13. Una fuente emite ondas esféricas isotrópicamente (es decir, con igual intensidad en todas las direcciones). La intensidad de la onda a 42.5 m de la fuente es de 197 μW/m^2. Halle la salida de potencia de la fuente.

14. Una nota de 313 Hz de frecuencia tiene una intensidad de 1.13 μW/m^2. ¿Cuál es la amplitud de las vibraciones del aire causadas por este sonido?

15. Una onda de sonido de 1.60 μW/cm^2 de intensidad atraviesa una superficie de 4.70 cm^2 de área. ¿Cuánta energía pasa por la superficie en 1 h?

16. Halle la razón entre las intensidades de dos sonidos cuyos niveles de sonido difieren en 1.00 dB.

17. Cierto nivel de sonido se aumenta en 30 dB adicionales. Demuestre que (*a*) su intensidad aumenta en un factor de 1000 y (*b*) su amplitud de presión aumenta en un factor de 32.

18. Un vendedor asegura que un sistema de estéreo tiene 110 W de potencia de audio. Al probar el sistema con varias bocinas dispuestas de modo que simulen una fuente puntual, la compradora advierte que puede acercarse hasta 1.3 m, estando el sistema a pleno volumen, antes de que el sonido lastime sus oídos. ¿Puede ella denunciar a la firma ante la Procuraduría del Consumidor?

19. Cierta bocina produce un sonido con una frecuencia de 2.09 kHz y una intensidad de 962 μW/m^2 a una distancia de 6.11 m. Suponga que no existen reflexiones y que la bocina emite igualmente en todas las direcciones. (*a*) Halle la intensidad a 28.5 m. (*b*) Halle la amplitud del desplazamiento a 6.11 m. (*c*) Calcule la amplitud de presión a 6.11 m.

20. (*a*) Si dos ondas de sonido, una en el aire y la otra en el agua, son iguales en intensidad, ¿cuál es la razón entre la amplitud de presión de la onda en el agua a la de la onda en el aire? (*b*) Si, en vez de esto, las amplitudes de presión son iguales, ¿cuál es la razón entre las intensidades de las ondas? Suponga que el agua está a 20° C.

21. Halle la densidad de energía de una onda de sonido a 4.82 km de una sirena de emergencia nuclear de 5.20 kW (véase la Fig. 17), suponiendo que las ondas son esféricas y que la propagación es isotrópica sin que exista absorción atmosférica.

22. Una fuente lineal (por ejemplo, un tren de carga largo en una vía recta) emite una onda expansiva cilíndrica. Suponiendo que el aire no absorbe energía, halle cómo dependen (*a*) la intensidad y (*b*) la amplitud de la onda de la distancia a la fuente. Desprecie las reflexiones y considere puntos cerca del centro del tren.

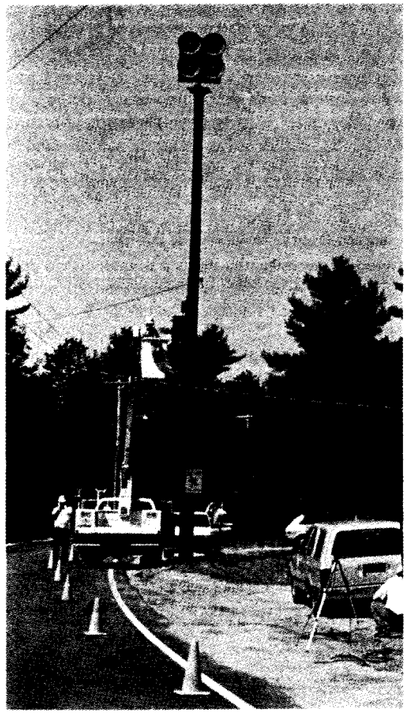


Figura 17 Problema 21.

23. En la figura 18 mostramos un interferómetro acústico, usado para demostrar la interferencia de las ondas de sonido. S es una fuente de sonido (por ejemplo, una bocina), y D es un detector de sonido, como lo es el oído o un micrófono. La trayectoria SBD puede variarse en longitud, pero la trayectoria SAD es fija. El interferómetro contiene aire, y se halla que la intensidad del sonido tiene un valor mínimo de 10 μW/cm^2 en una posición de B y sube continuamente hasta un valor máximo de 90 μW/cm^2 en una segunda posición a 1.65 cm de la primera. Halle (*a*) la frecuencia del sonido emitido por la fuente y (*b*) las amplitudes relativas de las ondas que llegan al detector para cada una de las dos posiciones de B. (*c*) ¿Por qué estas ondas tienen amplitudes diferentes, considerando que se originan en la misma fuente?

24. Está usted de pie a una distancia D de una fuente isotrópica de ondas sonoras. Camina 51.4 m hacia la fuente y observa que la intensidad de estas ondas se ha duplicado. Calcule la distancia D.

25. Calcule el nivel de sonido máximo posible en decibeles de las ondas sonoras en el aire. (*Sugerencia*: Tome la amplitud de presión igual a 1 atm.)

26. Suponga que el nivel de sonido promedio de la conversación humana es de 65 dB. ¿Cuántas personas se necesitan

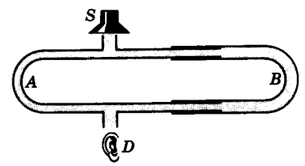


Figura 18 Problema 23.

para producir un nivel de sonido de 80 dB en un salón donde todos hablan al mismo tiempo a 65 dB?

27. Supongamos que el rumor de una hoja genera 8.4 dB de sonido. Halle el nivel de sonido de un árbol que tenga 2.71×10^5 hojas.

28. En una prueba, un aeroplano de propulsión a chorro subsónico vuela a una altitud de 115 m. El nivel de sonido en tierra al pasar el aeroplano sobre el punto de observación es de 150 dB. ¿A qué altitud debe volar el aeroplano para que el ruido en tierra no supere los 120 dB, el umbral de dolor? Desprecie el tiempo finito necesario para que el sonido llegue al suelo.

29. Cierta bocina (suponiendo que sea una fuente puntual) emite 31.6 W de potencia acústica. A 194 m se halla un pequeño micrófono de 75.2 mm^2 de área efectiva en su sección transversal. Calcule (*a*) la intensidad del sonido en el micrófono, (*b*) la potencia que incide en el micrófono, y (*c*) la cantidad de energía que choca contra el micrófono en 25.0 min.

30. Una onda sonora de 42.0 cm de longitud de onda entra en el tubo que se muestra en la figura 19. ¿Cuál debe ser el radio r más pequeño para que se escuche un mínimo en el detector?

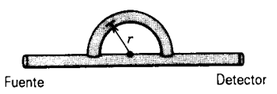


Figura 19 Problema 30.

31. Dos bocinas de un sistema de estéreo están separadas por una distancia de 2.12 m. Suponga que la amplitud del sonido que parte de cada bocina es la misma en la posición de un oyente que está a 3.75 m directamente enfrente de una de las bocinas; véase la figura 20. (*a*) ¿Para qué frecuencias en la gama audible (20 a 20,000 Hz) existirá una señal mínima? (*b*) ¿Para qué frecuencias es máximo el sonido?

32. Una fuente esférica de sonido está situada en P_1 cerca de una pared reflejante AB, y en el punto P_2 está colocado un micrófono, como se muestra en la figura 21. La frecuencia de la fuente de sonido es variable. Halle las dos frecuencias más bajas para las cuales la intensidad del sonido observada en P_2 será un máximo. No existe cambio de fase con la reflexión; el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

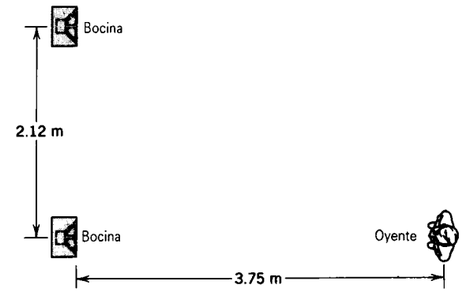


Figura 20 Problema 31.

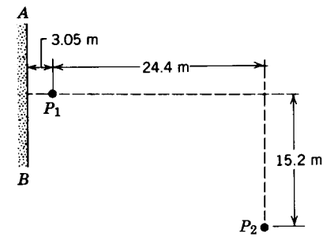


Figura 21 Problema 32.

33. Dos fuentes de sonido están separadas por una distancia de 5.00 m. Ambas emiten sonido a la misma amplitud y frecuencia, 300 Hz, pero están 180° fuera de fase. ¿En qué puntos a lo largo de la línea que los une será la intensidad del sonido la más grande?

34. El *tiempo de reverberación* de un auditorio o de una sala de conciertos es el necesario para que la intensidad del sonido (en W/m^2) disminuya en un factor de 10^6. El tiempo de reverberación depende de la frecuencia del sonido. Suponga que en una sala de conciertos en particular el tiempo de reverberación de una nota de cierta frecuencia es de 2.6 s. Si la nota se emite a un nivel de sonido de 87 dB, ¿cuánto tiempo le tomará al nivel de sonido caer a 0 dB (el umbral de audición del oído humano)?

35. Un gran reflector parabólico que tiene una abertura circular de 0.50 m de radio se usa para enfocar el sonido. Si la energía se emite desde el foco hasta el oído de un detective que escucha a través de un tubo de 1.0 cm de diámetro con una eficiencia del 12%, ¿a qué distancia puede captarse, de modo que se entienda, una conversación en tono de susurro? (Suponga que el nivel de un susurro es de 20 dB a 1.0 m de la fuente, considerada como puntual, y que el umbral de audición del oído humano es de 0 dB.)

Sección 20-4 Ondas longitudinales estacionarias

36. Las cuerdas de un violonchelo tienen una longitud L. (*a*) ¿En qué longitud ΔL deben ser acortadas digitando para cambiar el tono en una razón de frecuencia r? (*b*) Halle ΔL, cuando L = 80.0 cm y $r = \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$.

37. Una onda de sonido en un medio fluido se refleja en una barrera de modo que se forma una onda estacionaria. La distancia entre nodos es de 3.84 cm y la velocidad de propagación es de 1520 m/s. Halle la frecuencia.

38. Un pozo con costados verticales y agua en el fondo resuena a 7.20 Hz y a ninguna otra frecuencia más baja. El aire en el pozo tiene una densidad de 1.21 kg/m^3 y un módulo volumétrico de 1.41 × 10^5 Pa. ¿Qué tan profundo es el pozo?

39. En la figura 22, S es una pequeña bocina movida por un oscilador de audio y un amplificador, ajustable en las frecuencias de 1000 a 2000 Hz únicamente. D es un trozo de tubo cilíndrico de metal laminado de 45.7 cm de longitud y está abierto en ambos extremos. (*a*) ¿A qué frecuencias ocurrirá una resonancia cuando la frecuencia emitida por la bocina varíe entre 1000 y 2000 Hz? (*b*) Dibuje los nodos del desplazamiento para cada resonancia. Desprecie los efectos del extremo.

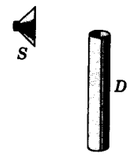


Figura 22 Problema 39.

40. El ancho de las terrazas de un anfiteatro en Los Angeles, California, figura 23, es de 36 in (= 0.914 m). El aplauso producido por una sola persona desde el centro del escenario se reflejará al escenario como un tono, ¿de qué frecuencia?

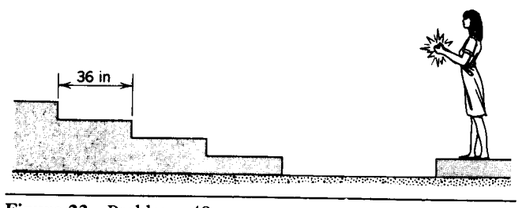


Figura 23 Problema 40.

41. Un túnel que pasa recto a través de una montaña amplifica en gran manera tonos a 135 y a 138 Hz. Halle la longitud más corta que puede tener el túnel.

42. El periodo de una estrella variable pulsante puede calcularse considerando que la estrella esté efectuando pulsaciones longitudinales radiales en el modo fundamental de una onda estacionaria; es decir, el radio varía periódicamente con el tiempo, con un antinodo de desplazamiento en la superficie. (*a*) ¿Cabe suponer que el centro de la estrella sea un nodo o un antinodo (de desplazamiento)? (*b*) Por analogía con el tubo de órgano abierto, demuestre que el periodo T de la pulsación está dado por

$$T = \frac{4R}{v_S},$$

donde R es el radio de equilibrio de la estrella y v_s es la velocidad media del sonido. (*c*) Las estrellas enanas blancas están compuestas de un material con un módulo volumétrico de 1.33 × 10^{22} Pa y una densidad de 1.0 × 10^{10} kg/m^3. Tienen radios iguales a 0.009 del radio solar. ¿Cuál es el periodo de pulsación aproximado de una estrella enana blanca? (Véase "Pulsating Stars", por John R. Percy, *Scientific American*, junio de 1975, pág. 66.)

43. En la figura 24, una barra está sujeta en su centro; un disco D colocado en su extremo se proyecta dentro de un tubo de vidrio que tiene granulillos de corcho esparcidos en su interior. El tubo está provisto de un émbolo P en el otro extremo. La barra se pone en vibración longitudinal y el émbolo se mueve hasta que los granulillos de corcho forman un patrón de nodos y antinodos (los granulillos forman bordes bien definidos en los antinodos de presión). Si conocemos la frecuencia v de las vibraciones longitudinales de la barra, una medición de la distancia promedio d entre antinodos sucesivos determina la velocidad del sonido v en el gas contenido en el tubo. Demuestre que

$$v = 2vd.$$

Éste es el método de Kundt para determinar la velocidad del sonido en diversos gases.

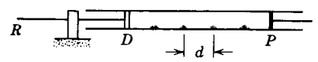


Figura 24 Problema 43.

Sección 20-5 Sistemas vibratorios y fuentes de sonido

44. (*a*) Halle la velocidad de las ondas de una cuerda de violín de 820 mg y 22.0 cm de longitud si la frecuencia de la fundamental es de 920 Hz. (*b*) Calcule la tensión en la cuerda.

45. Si una cuerda de violín está afinada en cierta nota, ¿en qué factor deberá aumentarse la tensión en la cuerda si ha de emitir una nota del doble de la frecuencia original (es decir, una nota a una octava más alta?

46. Cierta cuerda de violín tiene 30 cm de longitud entre sus extremos fijos y una masa de 2.0 g. La cuerda emite un La (440 Hz) cuando se pulsa sin digitar. ¿Dónde deberá ponerse el dedo para que suene un Do (528 Hz)?

47. Un tubo abierto de órgano tiene una frecuencia fundamental de 291 Hz. El primer sobretono (n = 3) de un tubo cerrado de órgano tiene la misma frecuencia que el segundo armónico del tubo abierto. ¿Qué longitud tiene cada tubo?

48. Un tubo de 1.18 m de longitud está cerrado en un extremo. Cerca del extremo abierto se coloca un alambre tenso. El alambre tiene 33.2 cm de longitud y 9.57 g de masa. Está fijo en ambos extremos y vibra en su modo fundamental. Pone en vibración a la columna de aire del tubo a su frecuencia fundamental por resonanacia. Halle (*a*) la frecuencia de oscilación de la columna de aire y (*b*) la tensión en el alambre.

49. Una cuerda de violín de 30.0 cm con una densidad de masa lineal de 0.652 g/m está situada cerca de un bocina alimentada por un oscilador de audio de frecuencia variable. Se halla que la cuerda se pone en oscilación únicamente a las frecuencias de 880 Hz y 1320 Hz cuando la frecuencia del oscilador se varía continuamente dentro de la gama de 500 a 1500 Hz. ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

Sección 10-6 Pulsaciones

50. Un diapasón de frecuencia desconocida produce tres pulsaciones por segundo contra un diapasón estándar de 384 Hz de frecuencia. La frecuencia de la pulsación disminuye cuando se pone en una punta del primer diapasón un pequeño trozo de cera. ¿Cuál es la frecuencia de este diapasón?

51. Una cuerda La de un violín está un poco más tensa de la cuenta. Se oyen cuatro pulsaciones por segundo cuando se hace sonar junto con un diapasón que está vibrando precisamente al tono La de concierto (440 Hz). ¿Cuál es el periodo de vibración de la cuerda de violín?

52. Se le dan a usted cuatro diapasones. El diapasón con la frecuencia más baja vibra a 500 Hz. Usando dos diapasones al mismo tiempo, se escuchan las siguientes frecuencias de pulsación: 1, 2, 3, 5, 7, y 8 Hz. ¿Cuáles son las frecuencias posibles de los otros tres diapasones?

53. Se le dan a usted cinco diapasones, cada uno de ellos con una frecuencia diferente. Ensayando con cada par de diapasones, (*a*) ¿cuál es el número máximo de frecuencias de pulsación *diferentes* que podrían obtenerse? (*b*) ¿Cuál es el número mínimo de frecuencias de pulsación *diferentes* que podrían obtenerse?

Sección 20-7 El efecto Doppler

54. Una fuente S genera ondas circulares en la superficie de un lago, mostrándose en la figura 25 el patrón de las crestas de las ondas. La velocidad de las ondas es de 5.5 m/s y la separación entre crestas es de 2.3 m. Usted está en un pequeño bote enfilado directamente hacia S a una velocidad constante de 3.3 m/s respecto a la orilla. ¿Qué frecuencia observa usted en las ondas?

55. ¿A qué frecuencia se oye el chillido de 15.8 kHz de las turbinas de los motores de un aeroplano que vuela a una velocidad de 193 m/s por el piloto de un segundo aeroplano que trata de adelantar al primero con una velocidad de 246 m/s?

56. Una ambulancia que emite un chillido de 1602 Hz se empareja y rebasa a un ciclista que pedalea una bicicleta a 2.63 m/s. Después de haberlo rebasado, el ciclista oye una frecuencia de 1590 Hz. ¿A qué velocidad se mueve la ambulancia?

57. Un silbato de 538 Hz de frecuencia se mueve en un círculo de 71.2 cm de radio con una velocidad angular de 14.7 rad/s. ¿Cuáles son (*a*) la frecuencia más baja, y (*b*) la frecuencia más alta captada por un oyente que está a gran distancia en reposo respecto al centro del círculo?

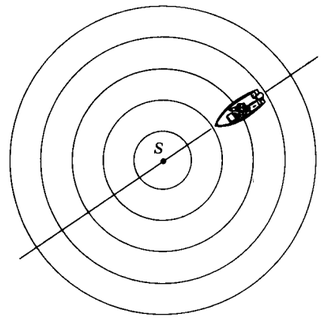


Figura 25 Problema 54.

58. En 1845, Buys Ballot probó por primera vez el efecto Doppler en el sonido. Colocó a un trompetista en un carro de plataforma jalado por una locomotora y a otro trompetista cerca de las vías. Si cada uno de los trompetistas tocaba una nota de 440 Hz, y si existían 4.0 pulsaciones por segundo cuando se aproximaban entre sí, ¿cuál era la velocidad de la plataforma?

59. Una bala se dispara con una velocidad de 2200 ft/s. Halle el ángulo formado por el cono de choque con la línea de movimiento de la bala.

60. Calcule la velocidad del proyectil ilustrado en la fotografía de la figura 14. Suponga que la velocidad del sonido en el medio en que está viajando el proyectil es de 380 m/s.

61. La velocidad de la luz en el agua es de 2.25 × 10^8 m/s (alrededor de las tres cuartas partes de la velocidad en el vacío). Un haz de electrones a alta velocidad que parte de un betatrón emite radiación Cerenkov en el agua, formando el frente de onda un cono de un ángulo de 58.0°. Halle la velocidad de los electrones en el agua.

62. Dos diapasones idénticos oscilan a 442 Hz. Una persona está situada en alguna parte de la línea que los une. Calcule la frecuencia de la pulsación medida por este individuo si (*a*) está parado y quieto y los diapasones se mueven ambos hacia la derecha a 31.3 m/s, y (*b*) los diapasones están estacionarios y el oyente se mueve hacia la derecha a 31.3 m/s.

63. Un aeroplano vuela a 396 m/s a una altitud constante. El choque sónico llega a un observador en tierra 12.0 s después de que el aeroplano ha pasado sobre su cabeza. Halle la altitud del aeroplano. Suponga que la velocidad del sonido es de 330 m/s.

64. Un avión de propulsión a chorro pasa sobre un punto situado en tierra a una altura de 5140 m y a una velocidad de 1.52 Mach (1.52 veces la velocidad del sonido). (*a*) Halle el ángulo formado por la onda de choque con la línea de movimiento del avión. (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a tierra la onda de choque después de que el avión ha pasado sobre el punto? Use 331 m/s como velocidad del sonido.

65. La figura 26 muestra a un transmisor y a un receptor de ondas contenidos en un solo instrumento. Se emplean para medir la velocidad V de un objeto-blanco (idealizado

como una placa plana) que se mueve directamente hacia la unidad, analizando las ondas reflejadas por él. (*a*) Aplique las ecuaciones de Doppler dos veces, primero con el blanco como observador y luego con el blanco como fuente, y demuestre que la frecuencia v_r de las ondas reflejadas en el receptor se relaciona con la frecuencia v_s de su fuente según

$$v_r = v_s\left(\frac{v+V}{v-V}\right),$$

donde v es la velocidad de las ondas. (*b*) En un gran número de situaciones prácticas, $V \ll v$. En este caso, demuestre que la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{v_r - v_s}{v_s} \approx \frac{2V}{v}.$$

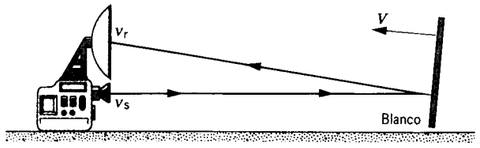


Figura 26 Problema 65.

66. Un aparato de sonar envía ondas de sonido de 148 kHz desde un auto de la policía a un camión que se aproxima con una velocidad de 44.7 m/s. Calcule la frecuencia de las ondas reflejadas detectada en el auto de la policía.

67. Una alarma acústica contra ladrones consta de una fuente que emite ondas de 28.3 kHz de frecuencia. ¿Cuál será la frecuencia de pulsación de las ondas reflejadas en un intruso que camine a razón de 0.95 m/s alejándose directamente de la alarma?

68. Una sirena que emite un sonido de 1000 Hz de frecuencia se mueve alejándose de usted hacia un peñasco con una velocidad de 10.0 m/s. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia del sonido que usted oye directamente procedente de la sirena? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia del sonido que usted oye reflejándose en el peñasco? (*c*) Halle la frecuencia de la pulsación. ¿Podría usted oír las pulsaciones? Considere que la velocidad del sonido en el aire es de 330 m/s.

69. Una persona que viaja en un auto sopla una trompeta que suena a 438 Hz. El auto avanza hacia una pared a 19.3 m/s. Calcule (*a*) la frecuencia del sonido como se recibiría en la pared y (*b*) la frecuencia del sonido reflejado que regresa a la fuente.

70. Dos submarinos se encuentran en ruta de colisión frontal durante unas maniobras en el Atlántico Norte. El primer submarino se mueve a 20.2 km/h y el segundo a 94.6 km/h. El primero envía una señal de sonar (onda sonora en el agua) de 1030 Hz. Las ondas de sonar viajan a 5470 km/h. (*a*) El segundo submarino capta la señal. ¿Qué frecuencia oye el detector de sonar de este segundo submarino? (*b*) El primer submarino capta la señal reflejada. ¿Qué frecuencia oye el detector de sonar de este primer submarino? Véase la figura 27. El océano está en calma; suponga que no hay corrientes.

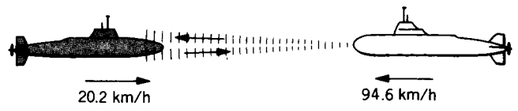


Figura 27 Problema 70.

71. Un auto de la policía hace sonar su sirena cuando se mueve a 27 m/s y se aproxima a un peatón estacionario. El policía que va en el auto oye la sirena a 12.6 kHz pero el peatón la oye a 13.7 kHz. Halle la temperatura del aire. (Suponga que la velocidad del sonido aumenta linealmente con la temperatura entre 0° C y 20° C; véase la tabla 1.)

72. En una conferencia sobre las desviaciones Doppler de las ondas ultrasónicas (de alta frecuencia) usadas en el diagnóstico médico, los autores decían: "La frecuencia de la onda ultrasónica incidente se desvía en unos 1.3 Hz/MHz aproximadamente por cada milímetro por segundo que se mueva una estructura en el cuerpo". ¿Qué velocidad de las ondas ultrasónicas en el tejido humano puede usted deducir de tal afirmación?

73. Un murciélago revolotea en una cueva, navegando muy eficazmente al utilizar emisiones ultrasónicas (emisiones cortas de sonido de alta frecuencia que duran un milisegundo o menos y se repiten varias veces por segundo). Suponga que la frecuencia de la emisión de los sonidos de un murciélago es de 39.2 kHz. Durante una zambullida rápida en línea recta hacia una pared de superficie plana, el murciélago se mueve a 8.58 m/s. Calcule la frecuencia del sonido del eco que escucha el murciélago reflejado por la pared.

74. Un submarino que se mueve hacia el norte con una velocidad de 75.2 km/h respecto al fondo del océano emite una señal de sonar (ondas sonoras en el agua empleadas de modo similar al radar; véase la tabla 1) de 989 Hz de frecuencia. Si en ese punto el océano tiene una corriente que se mueve hacia el norte a 30.5 km/h con relación a tierra, ¿qué frecuencia capta un buque que es arrastrado por la corriente al norte del submarino? (*Sugerencia*: Todas las velocidades que aparecen en las ecuaciones Doppler deben considerarse respecto al medio.)

75. Una sirena 2000 Hz y un oficial de la defensa civil están ambos en reposo con respecto a la Tierra. ¿Qué frecuencia oye el oficial si el viento sopla a 12 m/s (*a*) de la fuente hacia el observador y (*b*) del observador hacia la fuente?

76. Dos trenes que corren en vías paralelas viajan uno hacia el otro a 34.2 m/s con relación al suelo. Un tren hace sonar el silbato a 525 Hz. (*a*) ¿Qué frecuencia se oirá en el otro tren en aire tranquilo? (*b*) ¿Qué frecuencia se oirá en el otro tren si el viento sopla a 15.3 m/s paralelo a las vías y hacia el silbato? (*c*) ¿Qué frecuencia se oirá si se invierte la dirección del viento?

CAPÍTULO 21

LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD*

La teoría especial de la relatividad tiene la reputación inmerecida de ser un tema difícil. Matemáticamente, no es complicada; la mayor parte de sus detalles pueden comprenderse usando técnicas bien conocidas por los lectores de este texto. El aspecto quizá más desafiante de la relatividad especial consiste en su insistencia en que sustituyamos varias de nuestras ideas preconcebidas sobre el espacio y el tiempo, adquiridas a través de años de experiencia basadas en el "sentido común", por otras ideas totalmente nuevas.

Las ideas que en esencia constituyen la teoría de la relatividad especial fueron presentadas en público en un ensayo escrito por Albert Einstein y publicado en 1905.† En este capítulo presentamos los postulados básicos de la teoría de Einstein y sus consecuencias; introducimos también las técnicas matemáticas que permiten que las mediciones hechas en un marco de referencia se transformen a otro marco, y estudiamos algunas de las consecuencias en el campo de la cinemática y de la dinámica.

En este libro hemos presentado con anterioridad algunos aspectos de la relatividad especial y los hemos contrastado con los resultados correspondientes de la física clásica. Antes de iniciar este capítulo el lector debe revisar los siguientes apartados de nuestro libro: Sección 4-6, movimiento relativo; Sección 7-7, Energía cinética a altas velocidades; Sección 8.7, Masa y energía; y Sección 9-4, Ímpetu lineal de una partícula.

21-1 LAS DIFICULTADES CON LA FÍSICA CLÁSICA

La cinemática desarrollada por Galileo y la mecánica desarrollada por Newton, que forman la base de lo que llamamos la *física clásica*, lograron grandes éxitos. Particularmente notables son la comprensión del movimiento de los planetas y el uso de la teoría cinética para explicar ciertas propiedades observadas en los gases. Sin embargo, cierto número de fenómenos experimentales no pueden ser explicados mediante estas teorías clásicas que siguen siendo, por otra parte completamente válidas en otros casos. Consideremos unas cuantas de estas dificultades que se nos presentan con la física clásica.

Dificultades con nuestras ideas del tiempo

El pión (π^+ o π^-) es una partícula que puede ser creada en un acelerador de partículas de alta energía. Es una partícula muy inestable; se observa que los piones creados en reposo se desintegran (para formar otras partículas) con una media de sólo 26.0 ns (26.0×10^{-9} s). En un experimento en particular, se crearon piones en movimiento con una velocidad $v = 0.913c$ (en donde c es la velocidad de la luz). En este caso se observó que los piones viajaban en el laboratorio una distancia promedio de $D = 17.4$ m antes de desintegrarse, de lo cual concluimos que se desintegran

* Algunos profesores quizá desearán retrasar el estudio de la relatividad hasta después de haber estudiado las ondas electromagnéticas en el capítulo 41. En el capítulo 42 se estudian los efectos relativistas en el movimiento de ondas.

† En ese año Einstein publicó también sus trabajos sobre el movimiento browniano y sobre el efecto fotoeléctrico. Por este último trabajo (y no precisamente por su teoría de la relatividad) se le otorgó el premio Nobel de Física en 1921. Einstein propuso también una teoría *general* de la relatividad en 1917. La teoría general trata del efecto de la gravedad en el espacio y el tiempo, algunas de cuyas consecuencias se estudiaron en la sección 16-10. En este capítulo consideraremos únicamente la teoría *especial*, en la que la gravedad no desempeña papel alguno.

en un tiempo dado por D/v = 63.7 ns, mucho mayor que la vida media medida para los piones en reposo (26.0 ns). Este efecto, llamado *dilatación del tiempo*, sugiere que algo con respecto al movimiento relativo entre el pión y el laboratorio ha estirado el intervalo de tiempo medido en un factor de 2.5, aproximadamente. Tal efecto no puede ser explicado por la física newtoniana, en la que el tiempo es una coordenada universal que tiene valores idénticos para todos los observadores.

Dificultades con nuestras ideas de la longitud

Supongamos que un observador en el laboratorio, antes mencionado, coloca un marcador en la ubicación de la formación del pión y otro en la ubicación de su desintegración. La distancia entre los marcadores se mide en 17.4 m. Consideremos ahora la situación para un observador diferente que esté viajando junto con el pión a una velocidad $u = 0.913c$. Este observador, a quien le parece que el pión está en reposo, mide su vida media en 26.0 ns, característico de los piones en reposo. Para este observador, la distancia entre los marcadores que indican la formación y la desintegración del pión es $(0.913c)(26.0 \times 10^{-9}\ \text{s}) = 7.1$ m. Entonces, dos observadores que estén en movimiento relativo miden valores diferentes del mismo intervalo. Esto es igualmente inconsistente con la física newtoniana, en la cual las coordenadas espaciales son absolutas y ofrecen lecturas idénticas a todos los observadores.

Dificultades con nuestras ideas de la velocidad

La figura 1 muestra un juego entre *A* y *B*, visto por un observador *O*. Los dos jugadores y el observador están en reposo en este marco de referencia. *A* lanza una pelota con una velocidad superluminosa (más rápida que la luz) hacia *B*, el cual la atrapa. La señal luminosa que porta la visión de *A* lanzando la pelota viaja hasta el observador *O*, como lo hace también la señal luminosa que porta la visión de *B* atrapando la pelota. Ambas señales luminosas viajan a la velocidad *c*, que es menor que la velocidad de la pelota lanzada por *A*. En la posición del observador *O*, como se muestra en la figura 1, la señal luminosa que parte de *B* llega antes que la señal luminosa que parte de *A*. Por lo tanto, de acuerdo con *O*, ¡*B* atrapa la pelota antes de que *A* la lance! La física newtoniana nos permite acelerar proyectiles a velocidades ilimitadas y por lo tanto permite tales violaciones aparentes de la observación de causas y efectos.

Dificultades con nuestras ideas de la luz

La teoría del electromagnetismo de Maxwell (que analizaremos posteriormente en este texto) fue uno de los grandes logros de la física del siglo XIX. Una de las deducciones de esta teoría fue que la luz podía ser descrita como una

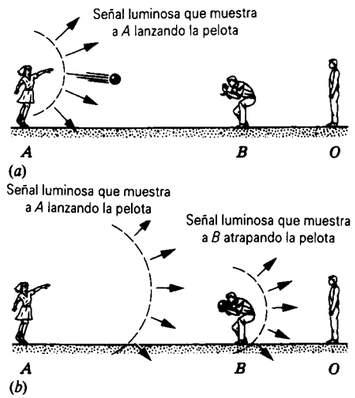


Figura 1 (*a*) *A* lanza una pelota a *B*. La pelota se mueve más rápido que la luz y por lo tanto está adelante de la señal luminosa que muestra a *A* lanzando la pelota. (*b*) La señal luminosa que muestra a *B* atrapando la pelota llegará al observador *O* antes que la señal luminosa que muestra a *A* lanzando la pelota. Tales inconsistencias lógicas son un argumento contra la posibilidad de acelerar las partículas a velocidades más rápidas que la luz.

onda electromagnética. Al igual que una onda mecánica (analizada en el capítulo 19) puede ser analizada en términos de partículas que oscilan en un medio, una onda electromagnética puede ser analizada en términos de campos eléctricos y magnéticos en oscilación. Fue por esto que los físicos experimentales de finales del siglo pasado trataron de detectar el medio en que esos campos oscilan al propagarse la luz, así como medir la velocidad con que la Tierra se mueve en este medio que llamaron *éter*.

Desde 1881, A. A. Michelson (primer estadounidense a quien se otorgó el premio Nobel en física) y E. W. Morley efectuaron una serie de delicados experimentos ópticos (descritos en la Sec. 45-7) para medir la velocidad a la que la Tierra se mueve a través del propuesto éter. Para su sorpresa, hallaron que, dentro de su pequeño error experimental, ¡el resultado era cero! Los experimentos más recientes con rayos láser han mejorado la precisión de este resultado en muchos órdenes de magnitud, y el valor permanece consistente con el valor cero.*

Dado el movimiento complejo de la Tierra (que gira alrededor de su eje y alrededor del Sol mientras el propio Sol gira alrededor del centro de la galaxia), parece

* Para mayores detalles con respecto al experimento de Michelson y Morley, uno de los experimentos culminantes en la historia de la física, véase *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, por Robert Resnick y David Halliday (Wiley, 1985).

inconcebible que el éter pudiera permanecer firmemente unido a la Tierra en movimiento. Se llevaron a cabo grandes esfuerzos teóricos hacia fines del siglo XIX para tratar de explicar cómo podía ocurrir esto. La brillante contribución de Einstein a la comprensión del espacio y del tiempo consistió en que demostró que los conceptos del éter y del medio de propagación de la luz eran inútiles e innecesarios.

Paradoja de Einstein

Einstein propuso su teoría especial de la relatividad en 1905, no como un intento de explicar el resultado del experimento de Michelson y Morley sino basado en un experimento que él había diseñado en su mente. Siendo un estudiante de 16 años, Einstein había aprendido la teoría del electromagnetismo de Maxwell y había pensado en una paradoja: si uno estuviese en movimiento a la velocidad de la luz paralelamente a un rayo de luz que viajase en el espacio vacío, observaría patrones "estáticos" del campo magnético y eléctrico. (De modo similar, mostramos en la figura 9 del capítulo 19 una pertubación "estática" en una cuerda, la cual sería vista por un observador que se moviese junto con la cuerda a la misma velocidad que las ondas en la cuerda.) Sin embargo, Einstein sabía que tales patrones estáticos del campo magnético y eléctrico en el espacio vacío violaban la teoría de Maxwell.

Einstein tenía dos caminos para resolver esta paradoja: o bien la teoría de Maxwell estaba equivocada, o bien la cinemática clásica que permite que un observador viaje junto con un rayo de luz estaba equivocada. Con la intuición que fue quizá su mayor atributo, Einstein depositó su fe en la teoría de Maxwell y buscó una alternativa a la cinemática de Galileo y de Newton. Más adelante en este capítulo demostraremos cómo esta nueva cinemática, que forma la base de la relatividad especial, evita que cualquier observador atrape a un rayo de luz. También demostraremos cómo se resuelven los otros problemas acerca del tiempo, la longitud, y la velocidad expuestos previamente.

Por supuesto, la prueba crítica de cualquier teoría consiste en lo bien que concuerda con los experimentos. La teoría de la relatividad especial de Einstein ha sido sometida a pruebas exhaustivas durante los últimos 85 años y las ha pasado todas. En donde la física clásica y la teoría de la relatividad predicen resultados diferentes, se ha encontrado siempre que el experimento concuerda con la teoría de la relatividad.

21-2 LOS POSTULADOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Una teoría científica comienza usualmente con aseveraciones generales llamadas *postulados*, que intentan proporcionar una base para la teoría. A partir de estos postulados podemos obtener un conjunto de leyes matemáticas en forma de ecuaciones que relacionan a las variables físicas. Por último, probamos las predicciones de las ecuaciones en el laboratorio. La teoría es válida hasta que el experimento la contradiga, después de lo cual los postulados pueden ser modificados o reemplazados, y el ciclo se repite.

Durante casi dos siglos, la mecánica de Galileo y de Newton resistió todas las pruebas experimentales. En este caso los postulados se refieren a la naturaleza absoluta del espacio y del tiempo. Basado en su experimento pensado sobre atrapar un rayo de luz, Einstein creyó en la necesidad de reemplazar las leyes del movimiento relativo de Galileo. En su trabajo de 1905, titulado "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento", Einstein ofreció dos postulados que forman la base de su teoría especial de la relatividad. Podemos presentar sus postulados como sigue:

El principio de relatividad: *Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.*

El principio de la constancia de la velocidad de la luz: *La velocidad de la luz en el espacio libre tiene el mismo valor c en todos los marcos de referencia inerciales.*

El primer postulado declara que las leyes de la física son absolutas, universales e iguales para todos los observadores inerciales. Las leyes que rigen para un observador inercial no pueden ser violadas por *ningún* observador inercial.

El segundo postulado es mucho más difícil de aceptar, porque viola nuestro "sentido común", el cual está firmemente arraigado en la cinemática de Galileo que hemos aprendido de las experiencias cotidianas. Consideremos tres observadores *A*, *B*, y *C*, cada uno de ellos en reposo en un marco de referencia inercial diferente. El observador *A* emite un destello de luz, y observa la luz viajando con velocidad *c*. El marco del observador *B* se mueve alejándose de *A* con una velocidad de $c/4$; la cinemática de Galileo predice que *B* mide el valor $c - c/4 = 3c/4$ para la velocidad de la luz emitida por *A*. El observador *C* está en un marco que se mueve *hacia A* con una velocidad $c/4$; según Galileo, el observador *C* mide una velocidad de $c + c/4 = 5c/4$ para la velocidad de la luz emitida por *A*. En cambio, el segundo postulado de Einstein asevera que ¡*los tres observadores miden la misma velocidad c en la pulsación luminosa*!

Por supuesto, ésta no es la manera de comportarse de los objetos ordinarios. Un proyectil disparado desde un automóvil en movimiento tiene una velocidad con respecto al suelo determinada por la suma vectorial de la velo-

cidad del proyectil respecto al automóvil y la velocidad del automóvil respecto al suelo. Sin embargo, las velocidades de las ondas y partículas que se mueven a velocidades cercanas a c no se comportan de esta manera. En la sección 21-6 discutiremos la ley relativista de la suma de velocidades y demostraremos que se reduce a la ley de "sentido común" de Galileo para bajas velocidades.

Einstein enunció estos postulados en un momento en que las pruebas experimentales eran difíciles e incluso imposibles. Durante las décadas siguientes, el desarrollo de los aceleradores de partículas de alta energía hicieron posible el estudio de los movimientos de las partículas a velocidades cercanas a c. Por ejemplo, en 1964 se llevó a cabo un experimento en el CERN, el laboratorio europeo de física de partículas de alta energía cercano a Ginebra, Suiza. El acelerador de protones del CERN se usó para producir un haz de partículas llamadas piones neutros (π^0), que se desintegran rápidamente (con vida media de alrededor de 10^{-16} s) en dos rayos gamma:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Los rayos gamma son radiaciones electromagnéticas que viajan a la velocidad de la luz. Los experimentadores midieron directamente la velocidad de los rayos gamma emitidos por los piones en desintegración, que se movían a una velocidad de $0.99975c$. Según Galileo, los rayos gamma emitidos en la dirección del movimiento de los piones deberían tener una velocidad de $c + 0.99975c = 1.99975c$ en el marco de referencia del laboratorio. Según Einstein, deberían tener una velocidad de c. La velocidad medida fue de 2.9977×10^8 m/s, igual a c dentro de 1 parte en 10^4, proporcionando así una verificación directa del segundo postulado.

Los dos postulados juntos tiene otra consecuencia: ellos implican que *es imposible acelerar una partícula a una velocidad mayor que c sin importar cuánta energía cinética le impartamos*. Ésta es también una predicción que puede probarse en el laboratorio y que muestra otra diferencia entre los postulados de la relatividad y los de la física clásica. La física clásica no fija un límite superior a la velocidad que puede alcanzar un objeto; la relatividad impone este límite a la velocidad, a la que según el primer postulado, debe ser la misma en todas las marcos de referencias.

En otro experimento realizado en 1964, fueron acelerados electrones por medio de una gran diferencia de voltaje (alrededor de 15 millones de volts), y se determinó directamente la velocidad de los electrones. La figura 2 muestra las velocidades medidas en función de la energía cinética adquirida por los electrones. Sin importar en cuánto se aumenta el voltaje de aceleración, la velocidad nunca llega a c ni la supera. Una vez más, los experimentos a altas velocidades son inconsistentes con las predicciones basadas en la cinemática de Galileo y de Newton pero, en su lugar, confirman los postulados de la relatividad especial.

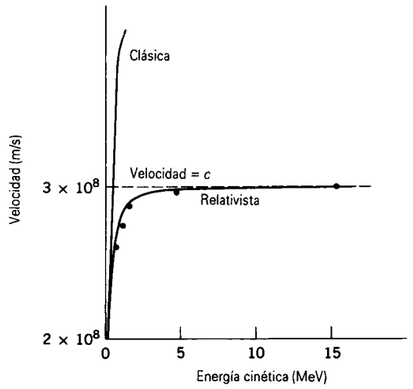


Figura 2 Los puntos representan las mediciones de la velocidad de los electrones acelerados por una gran diferencia de voltaje a una energía cinética conocida. Las mediciones demuestran que, no importa cuán grande sea la energía cinética, la velocidad de los electrones no supera a c. (Véase "Speed and Kinetic Energy of Relativistic Electrons", por William Bertozzi, *American Journal of Physics*, mayo de 1964, pág. 551).

21-3 CONSECUENCIAS DE LOS POSTULADOS DE EINSTEIN

En la sección 21-1 tratamos las dificultades en la interpretación de ciertas mediciones del tiempo, longitud, y velocidad basadas en la física clásica. Veamos ahora cómo pueden resolver aquellas dificultades los postulados de Einstein.

La relatividad del tiempo

Consideremos a dos observadores: S está en reposo sobre el suelo, y S' está en un tren que se mueve en una vía larga y recta con velocidad constante u respecto a S. Los observadores llevan aparatos idénticos para medir el tiempo, ilustrados en la figura 3, consistentes en un bulbo de destellos de luz F unido a un detector D y separados de un espejo M por una distancia L_0. El bulbo emite un destello de luz que viaja hasta el espejo. Cuando la luz reflejada regresa a D, el reloj hace tic y se dispara otro destello. El intervalo de tiempo Δt_0 entre los tics del reloj es precisamente la distancia $2L_0$ recorrida por la luz dividida entre la velocidad de la luz c:

$$\Delta t_0 = 2L_0/c. \qquad (1)$$

El intervalo Δt_0 es observado ya sea por S o por S' cuando el reloj está en reposo con respecto a ese observador.

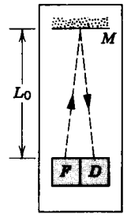


Figura 3 El reloj hace tics a intervalos Δt_0 determinados por el tiempo necesario para que un destello de luz recorra la distancia $2L_0$ desde el bulbo de destellos F hasta el espejo M y regrese al detector D. (Se supone que la distancia lateral entre F y D es despreciable en comparación con L_0.)

Consideremos ahora la situación cuando un observador mira a un reloj transportado por el otro. La figura 4 muestra una representación de la secuencia de sucesos que observa S* en el reloj transportado por S' en el tren en movimiento. De acuerdo con S, el destello es emitido en A, reflejado en B, y detectado en C. En este intervalo Δt, de acuerdo con S el reloj avanza una distancia horizontal de $u\,\Delta t$ a partir de la posición en que fue emitido el destello.

De acuerdo con S, el haz de luz viaja una distancia $2L$, en donde $L = \sqrt{L_0^2 + (u\,\Delta t/2)^2}$, como se muestra en la figura 4. El intervalo de tiempo medido por S para que la luz viaje esta distancia a una velocidad c (¡la misma velocidad medida por S'!) es

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{2\sqrt{L_0^2 + (u\,\Delta t/2)^2}}{c}. \qquad (2)$$

Sustituyendo a L_0 de la ecuación 1 y resolviendo la ecuación 2 para Δt nos da

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (3)$$

El factor en el denominador de la ecuacón 3 es siempre menor que o igual a 1, y entonces $\Delta t \geq \Delta t_0$. Esto es, el observador con relación al cual el reloj está en movimiento (el observador S) mide un intervalo mayor entre tics. Este efecto se llama *dilatación del tiempo*. El intervalo de tiempo Δt_0 medido por un observador (S' en este caso) con relación a quien su reloj está en reposo se llama *tiempo propio*. El intervalo de tiempo propio entre sucesos es el intervalo más pequeño entre ellos que pueda medir cualquier observador; todos los observadores en movimiento relativo respecto al reloj miden intervalos *más largos*.

* Suponemos que S tiene un conjunto de relojes sincronizados, los cuales S puede usar para llevar a cabo medidas de tiempo en los puntos A, B, y C. El establecimiento de un conjunto de relojes sincronizados se discute en la sección 21-5.

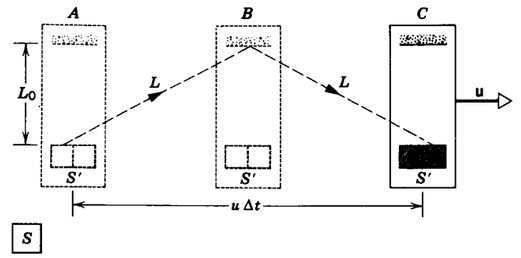


Figura 4 En el marco de referencia de S, el reloj transportado por S' en el tren se mueve con velocidad u. La línea de puntos, de longitud $2L$, muestra la trayectoria del haz de luz de acuerdo con S.

La ecuación 3 nos permite entender la dificultad en los experimentos de desintegración del pión discutidos en la sección 21-1. Un pión en reposo se desintegra en un intervalo de tiempo de 26.0 ns; este intervalo es un intervalo de tiempo propio y se le designa como Δt_0. (El pión es, en efecto, un reloj, y el intervalo desde la formación hasta la desintegración del pión puede considerarse como un tic del reloj.) Un observador en el laboratorio, con relación al cual el pión está en movimiento con una velocidad de $u = 0.913c$, esperaría medir un intervalo de tiempo de

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{26.0 \text{ ns}}{\sqrt{1 - (0.913)^2}} = 63.7 \text{ ns},$$

en conformidad con el valor medido.

La ecuación 3, que se deduce de los postulados de Einstein, da la relación entre intervalos de tiempo de acuerdo con la relatividad especial para observadores en movimiento relativo. Obsérvese que el factor en el denominador difiere apreciablemente de 1 únicamente para velocidades que se acerquen a la velocidad de la luz. Aun a una velocidad de $0.1c$, la ecuación 3 da $\Delta t = 1.005\Delta t_0$. A velocidades ordinarias podemos tomar $\Delta t = \Delta t_0$ con una gran precisión. Éste es el resultado clásico (el cual se obtiene directamente de la ecuación 3 cuando $u \ll c$) que concuerda con nuestra experiencia basada en el "sentido común".

La ecuación 3 es válida para cualquier dirección del movimiento relativo de S y S'. También es válida para cualquier tipo de reloj, no sólo para el tipo particular que se usó en su derivación. Ha sido verificada experimentalmente no sólo con la desintegración de partículas elementales moviéndose a altas velocidades (tales como el pión) sino también con precisos relojes atómicos en movimiento relativo entre sí a velocidades ordinarias (transportados en aviones comerciales). Aun los relojes biológicos que se manifiestan con el envejecimiento humano son afectados por la dilatación del tiempo. Un aspecto interesante

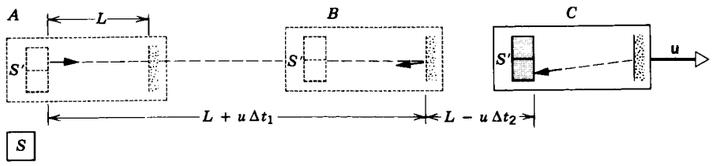


Figura 5 El reloj transportado por S' en el tren emite su destello luminoso en la dirección del movimiento del tren. La figura en C ha sido desplazada hacia la derecha por claridad.

de este efecto, la *paradoja de los gemelos*, se analizará después de este capítulo.

La relatividad de la longitud

Consideraremos ahora el efecto de los postulados de Einstein en la medición de los intervalos de longitud. Supongamos que S' gira 90° el reloj en el tren de manera que la luz viaja ahora en la dirección del movimiento del tren. La figura 5 muestra la secuencia de eventos observados por S en el reloj móvil. Según S, la longitud del reloj es L; como veremos, esta longitud es diferente a la longitud L_0 medida por S', para quien el reloj está en reposo.

En la posición A de la figura 5 se emite un destello de luz que llega al espejo (posición B) en un tiempo Δt_1 más tarde. La distancia total recorrida por la luz en este intervalo es $c\,\Delta t_1$, que puede también escribirse como la longitud L del reloj más la distancia adicional $u\,\Delta t_1$ que el espejo avanza en este intervalo debido al movimiento del tren. Es decir,

$$c\,\Delta t_1 = L + u\,\Delta t_1. \tag{4}$$

Durante el viaje de retorno desde el espejo hasta el detector (posición C en la Fig. 5), lo cual toma un intervalo Δt_2 de acuerdo con S, la luz viaja una distancia $c\,\Delta t_2$, la cual debe ser igual a la longitud L menos la distancia $u\,\Delta t_2$ que el tren avanza en este intervalo, o

$$c\,\Delta t_2 = L - u\,\Delta t_2. \tag{5}$$

Después de resolver las ecuaciones 4 y 5 para Δt_1 y Δt_2, sumamos para obtener el intervalo total de tiempo Δt, lo cual da

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c-u} + \frac{L}{c+u} = \frac{2L}{c}\,\frac{1}{1-u^2/c^2}. \tag{6}$$

Partiendo de la ecuación 3,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2L_0}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{7}$$

Haciendo a las ecuaciones 6 y 7 iguales entre sí y resolviendo, obtenemos

$$L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2}. \tag{8}$$

La ecuación 8 resume el efecto conocido como *contracción de la longitud*. La longitud L_0 medida por un observador (tal como S') que esté en reposo con respecto al objeto que se está midiendo se llama *longitud en reposo* (conocida también como *longitud propia*, en analogía con el tiempo propio). Todos los observadores en movimiento con relación a S' miden una longitud más corta, pero únicamente para las dimensiones a lo largo de la dirección del movimiento; las mediciones de la longitud transversal a la dirección del movimiento no se afectan. En la situación mostrada en la figura 4, la longitud L_0 no es afectada por el movimiento relativo.

La ecuación 8 puede ayudarnos a resolver las dificultades con el concepto clásico de longitud estudiado en la sección 21-1. Los dos marcadores colocados en el laboratorio en las posiciones de la formación y la desintegración del pión están separados por una distancia de 17.4 m. Puesto que los marcadores están en reposo en el laboratorio, la distancia entre ellos es la longitud en reposo. Para un observador que viaje con el pión, todo el laboratorio está en movimiento a razón de $u = 0.913c$, y se mide que la distancia entre los marcadores, de acuerdo a la ecuación 8, tiene una longitud contraída

$$L = (17.4\text{ m})\sqrt{1-(0.913)^2} = 7.1\text{ m},$$

lo cual es consistente con lo expuesto en la sección 21-1.

En circunstancias ordinarias, $u \ll c$ y los efectos de la contracción de la longitud son demasiado pequeños para ser observados. Por ejemplo, se mediría que un cohete de 100 m de longitud lanzado desde la Tierra con la velocidad de escape (u = 11.2 km/s) se contrae, de acuerdo con un observador en la Tierra, en una cantidad aproximadamente equivalente ¡a 2 diámetros atómicos únicamente!

La contracción de la longitud sugiere que la medida de los objetos en movimiento tiene una longitud más corta que la que tienen en reposo. No está implicada ninguna contracción real, sino meramente una diferencia en los resultados medidos, justo como dos observadores en movimiento relativo miden una frecuencia diferente para la misma fuente de sonido (el efecto Doppler).

La suma relativista de las velocidades

Modifiquemos ahora nuestro aparato de medir el tiempo como se muestra en la figura 6. El bulbo de destellos F se mueve hacia el extremo del espejo y se le reemplaza con

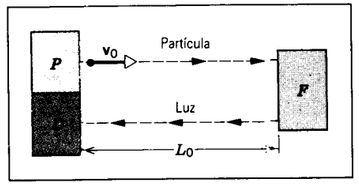


Figura 6 En este aparato de medir el tiempo, P emite una partícula con velocidad v_0. Cuando la partícula llega a F, provoca la emisión de un destello de luz que viaja hasta el detector D.

un aparato P que emite partículas con una velocidad v_0, tal como las mediría un observador en reposo con respecto al aparato. El bulbo lanza un destello al ser golpeado por una partícula, y un haz de luz efectúa el viaje de regreso hasta el detector D. Entonces el intervalo de tiempo Δt_0, medido por un observador (tal como S') que esté en reposo con respecto al aparato, consta de dos partes: una debida al viaje de la partícula en la distancia L_0 con velocidad v_0 y otra debido al haz de luz que viaja la misma distancia a la velocidad c:

$$\Delta t_0 = L_0/v_0 + L_0/c. \tag{9}$$

La secuencia de sucesos observados por S cuando el aparato de tiempo es transportado por S' en el tren es idéntica a la de la figura 5. La partícula emitida, la cual viaja a la velocidad v de acuerdo con S, llega a F después de un intervalo Δt_1, durante el cual viaja una distancia $v\,\Delta t_1$, la que es igual a la longitud (contraída) L más la distancia adicional $u\,\Delta t_1$ que se movió el tren durante ese intervalo:

$$v\,\Delta t_1 = L + u\,\Delta t_1. \tag{10}$$

En el intervalo Δt_2, el haz de luz viaja una distancia $c\,\Delta t_2$ igual a la longitud L menos la distancia $u\,\Delta t_2$ avanzada por el tren en ese intervalo:

$$c\,\Delta t_2 = L - u\,\Delta t_2. \tag{11}$$

Resolviendo las ecuaciones 10 y 11 para Δt_1 y Δt_2, podemos entonces hallar el intervalo total de tiempo $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ entre tics de acuerdo con S, y sustituimos ese resultado junto con la ecuación 9 en la ecuación 3, lo cual nos da (después de usar la ecuación 8 para relacionar a L_0 con L)

$$v = \frac{v_0 + u}{1 + v_0 u/c^2}. \tag{12}$$

La ecuación 12 nos da una forma de la ley de la suma de las velocidades consistente con los postulados de Einstein; aquí tratamos únicamente la suma de velocidades en la dirección del movimiento relativo (la dirección de **u**). Más adelante en este capítulo derivaremos resultados más generales.

De acuerdo con Galileo y Newton, un proyectil disparado hacia adelante con velocidad v_0 en un tren que se esté moviendo con velocidad u tendría una velocidad $v_0 + u$ con relación a un observador en el suelo. Esto permite claramente que se obtengan velocidades mayores que c. La diferencia entre el resultado clásico y el resultado relativista es el denominador de la ecuación 12, el cual puede ciertamente reemplazarse por 1 en circunstancias ordinarias cuando las velocidades son mucho menores que c. Este importante factor, como lo veremos en el problema muestra 2, impide que la velocidad relativa supere alguna vez a c.

Si el proyectil es un haz de luz ($v_0 = c$ de acuerdo con S'), entonces la ecuación 12 da inmediatamente $v = c$ para todos los observadores, sin importar cuál sea su velocidad con relación a S' (es decir, independiente de u). Así, la ecuación 12 es consistente con el segundo postulado de Einstein.

Problema muestra 1 Los muones son partículas elementales con una vida media (propia) de 2.2 μs. Se producen con muy altas velocidades en la atmósfera superior cuando los rayos cósmicos (partículas de alta energía procedentes del espacio) chocan con las moléculas de aire. Considere que la altura L_0 de la atmósfera (su longitud en reposo) es de 100 km en el marco de referencia de la Tierra, y obtenga la velocidad mínima que haría posible que los muones sobreviviesen el viaje hasta la superficie de la Tierra. Resuelva este problema de dos maneras: (*a*) en el marco de referencia de la Tierra y (*b*) en el marco de referencia del muón.

Solución (*a*) En el marco de referencia de la Tierra (Fig. 7*a*), la desintegración del muón en movimiento se hace más lenta debido al efecto de dilatación del tiempo. Si el muón se mueve con una velocidad que sea muy cercana a c, el tiempo necesario para que viaje desde la parte superior de la atmósfera hasta la Tierra es

$$\Delta t = \frac{L_0}{c} = \frac{100\text{ km}}{3.00\times10^8\text{ m/s}} = 333\ \mu\text{s}.$$

El muón debe sobrevivir cuando menos 333 μs en el marco de referencia de la Tierra. Hallemos ahora la velocidad que dilata la vida media a partir de su valor propio Δt_0 (= 2.2 μs) hasta este valor, de acuerdo con la fórmula de dilatación del tiempo (Ec. 3):

$$333\ \mu\text{s} = \frac{2.2\ \mu\text{s}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Al resolver, hallamos que

$$u = 0.999978c.$$

(*b*) En el marco de referencia del muón, la atmósfera está desplazándose con una velocidad elevada. En este marco de referencia toda la atmósfera debe desplazarse en un tiempo igual a la vida media (propia) del muón, y entonces la altura de la atmósfera no puede ser mayor de

$$L = c\,\Delta t_0 = (3.00\times10^8\text{ m/s})(2.2\times10^{-6}\text{ s}) = 660\text{ m}.$$

Por supuesto, ésta es la longitud contraída medida en el marco de referencia del muón (véase la Fig. 7*b*). La relación entre la

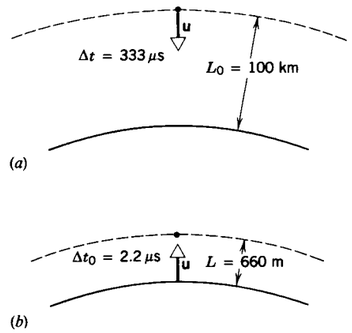


Figura 7 Problema muestra 1. (*a*) En el marco de referencia de la Tierra, un muón tarda 333 μs en recorrer una distancia de 100 km a través de la atmósfera. (*b*) En el marco de referencia del muón, la atmósfera tiene una altura de 660 m únicamente, y en el viaje tarda 2.2 μs.

longitud en reposo L_0 (= 100 km), medida en el marco de referencia de la Tierra, y la longitud contraída, medida en el marco de referencia del muón, está dada por la ecuación 8, y entonces

$$660 \text{ m} = (100 \text{ km})\sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

Despejando la velocidad u, obtenemos el mismo resultado dado en la parte (*a*).

Obsérvese que una *dilatación del tiempo* en un marco de referencia puede ser observada como una *contracción de la longitud* en el otro. Esta interrelación entre el tiempo y el espacio es un aspecto fundamental de la relatividad especial.

Problema muestra 2 Un vehículo espacial se aleja de la Tierra con una velocidad de 0.80*c* cuando dispara un proyectil paralelo a la dirección de movimiento del vehículo. El proyectil se mueve con una velocidad de 0.60*c* con relación al vehículo (Fig. 8). ¿Cuál sería la velocidad del proyectil medida por un observador en la Tierra? Compárese con las predicciones de la cinemática de Galileo.

Solución Este problema es muy similar al del observador y el tren. Aquí S' está en el vehículo y S está en la Tierra, y S' se mueve con una velocidad de $u = 0.80c$ con relación a S. El proyectil se mueve con una velocidad $v_0 = 0.60c$ con relación a S', y buscamos su velocidad v con relación a S. Usando la ecuación 12, obtenemos

$$v = \frac{v_0 + u}{1 + v_0 u/c^2} = \frac{0.60c + 0.80c}{1 + (0.60c)(0.80c)/c^2}$$
$$= \frac{1.40c}{1.48} = 0.95c.$$

De acuerdo con la cinemática clásica (el numerador de la ecuación 12), un observador en la Tierra vería al proyectil moviéndose a 0.60*c* + 0.80*c* = 1.40*c*, superando por lo tanto la velocidad relativa máxima de *c* permitida por la relatividad. Puede verse cómo la ecuación 12 impone este límite en la velocidad. Aun cuando v_0 fuese 0.9999 $\cdots$ *c* y *u* fuese 0.9999

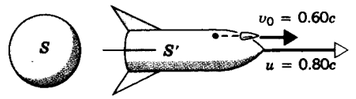


Figura 8 Problema muestra 2. Un vehículo espacial se aleja de la Tierra con una velocidad de 0.80*c*. Un observador S' situado en el vehículo espacial dispara un proyectil y mide su velocidad en 0.60*c* con relación al vehículo.

0.9999 $\cdots$ *c*, la velocidad relativa *v* medida por *S* permanecería siendo menor que *c*.

21-4 LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Los postulados de Einstein proporcionan un primer paso en la resolución de las dificultades que presentamos en la sección 21-1, pero se necesita una base matemática más formal para dar a esta teoría todo su poder para calcular los resultados esperados de una variedad de procesos físicos más amplia. Por ejemplo, podríamos desear calcular cuáles son las diferencias de los resultados de las mediciones de la energía o de la intensidad de un campo magnético para los observadores en movimiento relativo.

Requerimos de un grupo de relaciones llamadas *ecuaciones de transformación* que relacionen las observaciones de un suceso hechas por dos observadores diferentes. Las ecuaciones de transformación tienen tres ingredientes: (1) un observador S en reposo en un marco inercial, (2) otro observador S' en reposo en un marco inercial diferente que esté en movimiento con velocidad constante respecto a S, y (3) un suceso que sea observado *tanto* por S *como* por S'. Según cada uno de los observadores, el suceso ocurre en un grupo en particular de coordenadas en el espacio tridimensional *y también* en un tiempo en particular. Conociendo la velocidad relativa de S y de S', deseamos calcular las coordenadas x', y', z', t' de un evento tal como lo observa S' a partir de las coordenadas x, y, z, t del *mismo suceso* de acuerdo con S. Simplificaremos este problema un tanto, sin perder generalidad, eligiendo siempre a los ejes x y x' a lo largo de la dirección de **u** (véase la Fig. 9).

Este problema puede ser resuelto usando la cinemática clásica de Galileo, y las ecuaciones de *transformación Galileanas* resultantes son

$$x' = x - ut,$$
$$y' = y, \qquad (13)$$
$$z' = z,$$
$$t' = t.$$

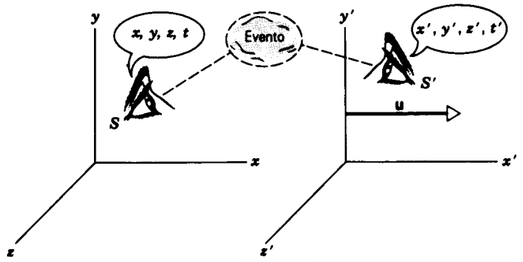


Figura 9 Dos observadores, cuyos marcos de referencia están representados por S y S', observan el mismo suceso. S' se mueve con relación a S con una velocidad **u** a lo largo de la dirección común xx'. S mide las coordenadas x, y, z, t del suceso, mientras que S' mide las coordenadas x', y', z', t' del mismo suceso.

La primera de estas ecuaciones es consistente con nuestra experiencia de "sentido común". Por ejemplo, supongamos que S está en reposo sobre el suelo y que mide la posición x de un poste de una cerca. S', quien está en un automóvil que se mueve con una velocidad u relativa a S, halla realmente al poste en la posición $x' = x - ut$ (Fig. 10). La cuarta ecuación, $t' = t$, simplemente se dio por supuesta en la física clásica (como lo ejemplifica la coordenada universal del tiempo de Newton).

Las relaciones relativistas que buscamos se conocen como *ecuaciones de transformación de Lorentz*. Se las nombra así en honor del físico holandés H. A. Lorentz, quien las propuso (antes que Einstein) por una razón bastante diferente y quien no estaba plenamente consciente de sus implicaciones respecto a la naturaleza del espacio y del tiempo. Las ecuaciones pueden derivarse directamente de los postulados de Einstein, si invocamos ciertas suposiciones razonables con respecto a la simetría y la homogeneidad del espacio y del tiempo. Como ejemplo de esta última propiedad, consideremos a un observador S que mide la longitud de una barra sostenida por el observador S' en un marco inercial diferente. El resultado de la medición llevada a cabo por S no depende de dónde está ubicado S' en el marco de referencia o de la hora del día en que S haga la medición.

Las ecuaciones de transformación de Lorentz, derivadas de estas hipótesis son*

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut),$$
$$y' = y, \qquad (14)$$
$$z' = z,$$
$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2).$$

Obsérvese que un objeto situado inicialmente en el origen de acuerdo con S (es decir, $x = 0$ en $t = 0$) está también situado inicialmente en el origen de acuerdo con S' (es decir, $x' = 0$ y $t' = 0$).

En estas ecuaciones hemos empleado el *factor* γ *de Lorentz*, definido como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (15)$$

En las ecuaciones de relatividad es también conveniente introducir el *parámetro* β *de la velocidad*, definido como la razón entre la velocidad relativa u de los dos sistemas de coordenadas y la velocidad de la luz:

$$\beta = u/c. \qquad (16)$$

En la tabla 1 se dan algunos valores de muestra de β y de γ, y en la figura 11 se muestra la relación entre β y γ. El intervalo de γ está entre 1 (a baja velocidad, en donde $u \ll c$ o $\beta \ll 1$) y el ∞ (a alta velocidad, donde $u \to c$ o $\beta \to 1$).

Obsérvese que las ecuaciones de transformación de Lorentz se reducen a las de la transformación galileana (Ecs. 13) cuando $u \ll c$. Una manera conveniente de demostrar esto es hacer que $c \to \infty$, de modo que $u/c \to 0$. En este caso, como usted debería demostrarlo, las ecuaciones 14 relativistas se reducen directamente a las ecuaciones 13 clásicas. Todos los resultados clásicos derivados en los capítulos anteriores concuerdan con

* Para una derivación de estas ecuaciones, véase *Introduction to Special Relativity*, por Robert Resnick (Wiley, 1968), sección 2.2.

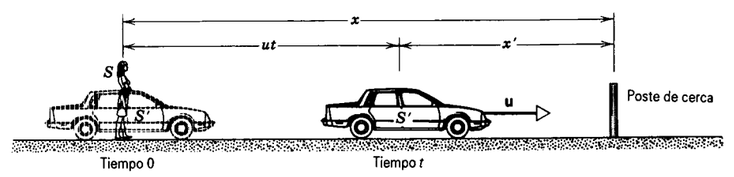


Figura 10 De acuerdo con S, el poste está en la coordenada x. De acuerdo con S', quien está en una coordenada ut con relación a S en el tiempo t, el poste está en la coordenada $x' = x - ut$. Obsérvese que los orígenes de S y de S' coinciden en $t = 0$.

TABLA 1 VALORES MUESTRA DEL PARÁMETRO DE VELOCIDAD Y DEL FACTOR DE LORENTZ

β	γ	β	γ
0.00	1.000	0.90	2.29
0.10	1.005	0.99	7.09
0.30	1.048	0.999	22.4
0.60	1.25	0.9999	70.7

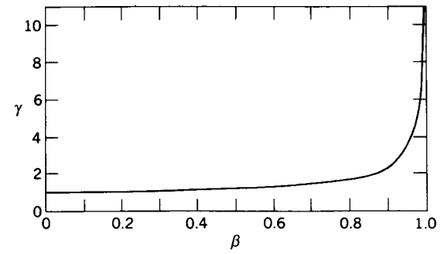


Figura 11 El factor γ de Lorentz en función del parámetro β de la velocidad.

los experimentos cuando $u \ll c$. Debemos tener en cuenta los efectos relativistas únicamente a velocidades altas.

Las ecuaciones 14 nos permiten hallar las coordenadas de espacio y tiempo en S' si las conocemos en S. Sin embargo, supongamos que deseamos conocer las coordenadas en S, dadas las coordenadas en S'. Desde el punto de vista de S' en la figura 9, S parece moverse en la dirección *negativa* de x (o de x'). Podemos obtener la *transformación inversa de Lorentz* simplemente cambiando las coordenadas primadas con las no primadas en las ecuaciones 14 y sustituyendo a u por $-u$. Esto da

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma(t' + ux'/c^2). \end{aligned} \tag{17}$$

Podemos emplear un método diferente para invertir la transformación de Lorentz (véase el problema 18) resolviendo las ecuaciones 14 algebraicamente para x y t (tratando a la primera y última ecuaciones como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas). Al hacerlo, obtenemos exactamente la transformación inversa dada por las ecuaciones 17, las cuales fueron obtenidas directamente a partir de un argumento de simetría.

La tabla 2 resume las ecuaciones de la transformación de Lorentz cuando la velocidad relativa entre los sistemas de coordenadas está en la dirección común xx'. Se muestran las ecuaciones en cuatro formas: la transformación de Lorentz (Ecs. 14), la transformación inversa de Lorentz (Ecs. 17), y las dos transformaciones del *intervalo* correspondientes, las cuales se utilizan cuando deseamos transformar no una coordenada sino un intervalo de espacio o de tiempo, tal como $\Delta x' = x_2' - x_1'$ (la distancia entre dos sucesos, tal como la mediría S') o $\Delta t' = t_2' - t_1'$ (el tiempo entre dos sucesos, tal como lo mediría S').

Problema muestra 3 En un marco inercial S, una luz roja y una luz azul están separadas por una distancia $\Delta x = 2.45$ km, con la luz roja en el valor más grande de x. La luz azul produce un destello, y 5.35 μs más tarde lo produce la luz roja. El marco S' se mueve en la dirección creciente de x con una velocidad de $u = 0.855c$. ¿Cuál es la distancia entre los dos destellos y el tiempo entre ellos tal como los mediría S'?

Solución El parámetro de Lorentz es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.855)^2}} = 1.928.$$

Se nos dan los intervalos en S como $\Delta x = 2450$ m y $\Delta t = 5.35 \times 10^{-6}$ s. Según la tabla 2, tenemos las transformaciones del intervalo

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - u\,\Delta t) \\ &= 1.928[2450 \text{ m} - (0.855)(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(5.35 \times 10^{-6} \text{ s})] \\ &= 2078 \text{ m} = 2.08 \text{ km} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2) \\ &= 1.928[5.35 \times 10^{-6} \text{ s} - (0.855)(2450 \text{ m})/(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})] \\ &= -3.147 \times 10^{-6} \text{ s} = -3.15\ \mu\text{s}. \end{aligned}$$

En S', el destello rojo está ubicado también en la coordenada más distante, pero la distancia es 2.08 km en lugar de 2.45 km.

TABLA 2 LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACION DE LORENTZ†

Transformación de Lorentz	*Transformación inversa*	*Transformación del intervalo*	*Transformación inversa del intervalo*
$x' = \gamma(x - ut)$	$x = \gamma(x' + ut')$	$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\,\Delta t)$	$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\,\Delta t')$
$y' = y$	$y = y'$	$\Delta y' = \Delta y$	$\Delta y = \Delta y'$
$z' = z$	$z = z'$	$\Delta z' = \Delta z$	$\Delta z = \Delta z'$
$t' = \gamma(t - ux/c^2)$	$t = \gamma(t' + ux'/c^2)$	$\Delta t' = \gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2)$	$\Delta t = \gamma(\Delta t' + u\,\Delta x'/c^2)$

† Aplicar estas ecuaciones únicamente en el caso de movimiento relativo en la dirección xx'. El factor de Lorentz es $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

Además, en S' el destello rojo llega *antes* que el destello azul (al contrario de lo que se observa en S); el tiempo entre destellos es de 3.15 μs de acuerdo con S'.

21-5 MEDICIÓN DE LAS COORDENADAS ESPACIO-TIEMPO EN UN SUCESO

Hasta ahora poco hemos dicho respecto a cómo hacen S y S' para medir las coordenadas x, y, z, t y x', y', z', t' de un suceso, como en el caso de los destellos de luz del problema muestra 3. El procedimiento que describimos ahora forma una base conceptual sobre la cual pueden basarse los procedimientos de laboratorio reales.

Supongamos que S tiene un equipo grande de asistentes disponible para ayudarnos a establecer un sistema de coordenadas. A cada asistente se le da un reloj y una barra de medición de una cierta longitud. Por ejemplo, tres asistentes tienen barras de medición de 1 m de longitud. Se les instruye para que coloquen sus barras, cada una a lo largo de uno de los tres ejes de coordenadas, y esperen en la posición determinada por el extremo de la barra hasta que vean un destello de luz en el origen, en cuyo momento tienen que hacer marchar a sus relojes en la lectura preestablecida de 3.33×10^{-9} s (3.33 ns, el tiempo necesario para que la luz viaje la distancia de 1 m desde el origen hasta el punto donde se halla el asistente). Otros tres asistentes, a quienes se les ha asignado a cada uno en forma similar uno de los ejes de coordenadas, reciben barras de 2 m de longitud y se les instruye para hacer marchar sus relojes, cuando vean el destello de luz, al tiempo preestablecido de 6.67 ns (el tiempo para que la luz viaje 2 m). Cada asistente es enviado a un puesto con una barra de cierta longitud L y un reloj preeestablecido en $t = L/c$.

Cuando todos los asistentes estén en sus puestos, S dispara un destello de luz en el origen y simultáneamente pone en marcha el reloj que está en el origen, y previamente puesto en cero. Cuando la señal luminosa llega a los otros relojes, cada uno a su vez se pone en marcha en la lectura preestablecida. Así, el reloj del eje x en $x = 1$ m se pone en marcha a la lectura preestablecida de 3.33 ns cuando el reloj del origen señala 3.33 ns; el reloj del eje x en $x = 2$ m se pone en marcha a la lectura preestablecida de 6.67 ns cuando el reloj que está en el origen y el reloj que está en $x = 1$ marcan ambos 6.67 ns; y así sucesivamente para todos los relojes del sistema de coordenadas. Todos los relojes de todo el sistema están entonces perfectamente sincronizados. En la figura 12 se representa al sistema de barras y relojes resultante.

Supongamos que S desea graficar el progreso de una partícula que se mueve a través del sistema de coordenadas. Todo lo que deben hacer S y los asistentes es observar a la partícula mientras viaja y trazar cuando pase, cada punto de la coordenada y la lectura que da el reloj que está en esa coordenada.

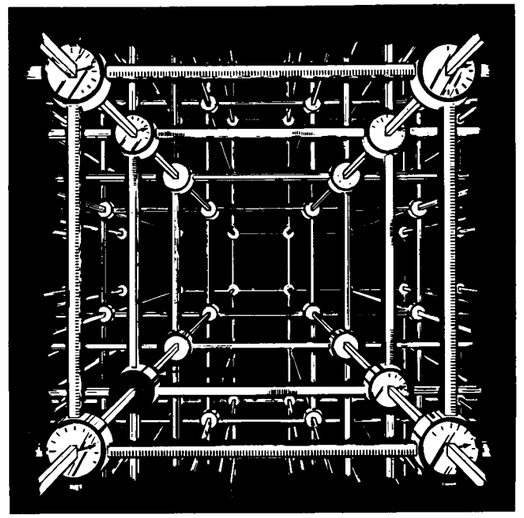


Figura 12 Armazón de barras de medición y de relojes que podría ser usada por un observador situado en un marco de referencia en particular para determinar las coordenadas espacio-tiempo de un suceso.

Por supuesto, esta calibración sirve únicamente para el observador S. El observador S' y todos los demás observadores inerciales deben llevar a cabo un procedimiento similar para definir un sistema de coordenadas y sincronizar sus relojes. Con tal esquema, las barras de medición y los relojes de cada observador (los cuales están, por supuesto, en reposo en el marco de ese observador) son exclusivos de ese marco inercial e independientes de las barras y los relojes de los observadores que estén en otros marcos inerciales.

Este procedimiento sugiere que el espacio y el tiempo no son coordenadas independientes, sino que la descripción de un suceso debe incluir a sus coordenadas tanto de espacio como de tiempo. (Es decir, no podemos usar un reloj que esté en una posición para registrar el paso de una partícula a través de otra posición.) Por esta razón, la relatividad especial se formula usualmente en términos de las *coordenadas espacio-tiempo* x, y, z, t combinadas. El espacio y el tiempo se tratan como coordenadas equivalentes en la relatividad especial.

21-6 LA TRANSFORMACIÓN DE LAS VELOCIDADES

En esta sección usamos las ecuaciones de la transformación de Lorentz para relacionar la velocidad **v** de una par-

tícula medida por un observador en el marco S con la velocidad $\mathbf{v}'$ de la misma partícula medida por un observador en el marco S', quien a su vez se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ con relación a S. En esta discusión, es importante tener en mente los significados de estas tres velocidades.

Supongamos que el observador S encuentra que la partícula se mueve desde las coordenadas x_1, y_1, z_1, t_1 hasta x_2, y_2, z_2, t_2. Por otra parte, el observador S' registra las observaciones de las coordenadas inicial y final de la misma partícula como x_1', y_1', z_1', t_1' y x_2', y_2', z_2', t_2'.

Calculemos a v_x' ($= \Delta x'/\Delta t'$), la componente x' de la velocidad medida por S'. Partiendo de la tabla 2, obtenemos las ecuaciones de transformación para los intervalos $\Delta x'$ y $\Delta t'$. Al dividir estas dos ecuaciones, obtenemos

$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - u\,\Delta t)}{\gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2)} = \frac{\Delta x/\Delta t - u}{1 - u(\Delta x/\Delta t)/c^2},$$

o, reemplazando a $\Delta x/\Delta t$ por v_x,

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}. \qquad (18)$$

De modo similar, obtenemos las ecuaciones de transformación para las componentes y y z de las velocidades:

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \quad \text{y} \quad v_z' = \frac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}. \qquad (19)$$

Obsérvese que $v_y' \neq v_y$, aun cuando $\Delta y = \Delta y'$, porque $\Delta t \neq \Delta t'$. Para v_z' se tienen condiciones similares. Éste es otro ejemplo de la diferencia entre el modo en que las transformaciones de Galileo y de Lorentz tratan las coordenadas del tiempo. Conviene asegurarse de haber tomado nota de que los denominadores de las tres ecuaciones incluyen todas al factor v_x.

Las ecuaciones 18 y 19 dan la *transformación Lorentz de la velocidad*. Son análogas a las ecuaciones de la transformación de Lorentz de coordenadas: relacionan las observaciones en un marco de coordenadas con las observaciones en otro. La tabla 3 resume estas ecuaciones, junto con la transformación inversa correspondiente de la velocidad. Obsérvese que la ecuación de la transformación inversa para v_x es idéntica a la ecuación 12, la cual derivamos de una manera bastante diferente. En la ecuación 12, la velocidad v_0 es la misma que la velocidad v_x' medida por S'.

Examinemos las ecuaciones 18 y 19 en el límite no relativista. ¿Se reducen a la transformación galileana clásica cuando $u \ll c$ (o, equivalentemente, cuando $c \to \infty$)? En este caso las ecuaciones 18 y 19 se reducen a

$$v_x' = v_x - u, \quad v_y' = v_y, \quad \text{y} \quad v_z' = v_z, \qquad (20)$$

que son realmente los resultados galileanos, dados por la ecuación 43 del capítulo 4 o diferenciando la ecuación 13, la transformación galileana de las coordenadas.

Demostraremos ahora directamente que la transformación de Lorentz de la velocidad da el resultado exigido por

TABLA 3 LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ DE LA VELOCIDAD

Transformación de la velocidad	*Transformación inversa de la velocidad*
$v_x' = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$	$v_x = \dfrac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2}$
$v_y' = \dfrac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$	$v_y = \dfrac{v_y'}{\gamma(1 + uv_x'/c^2)}$
$v_z' = \dfrac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$	$v_z = \dfrac{v_z'}{\gamma(1 + uv_x'/c^2)}$

el segundo postulado de Einstein (la constancia de la velocidad de la luz): una velocidad c medida por un observador debe ser medida también como c por cualquier otro observador. Supongamos que el suceso común que es observado por S y S' es el paso de un haz de luz a lo largo de la dirección x. El observador S mide $v_x = c$ y $v_y = v_z = 0$. ¿Qué velocidad mide el observador S'? Usando las ecuaciones 18 y 19, hallamos que las componentes de la velocidad medidas por S' son

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = \frac{c - u}{1 - uc/c^2} = \frac{c - u}{(c - u)/c} = c,$$

$$v_y' = v_z' = 0.$$

Obsérvese que este resultado se obtiene *independientemente de la velocidad relativa u entre S y S'*. Una velocidad c medida en un marco de referencia inercial conduce a una velocidad c medida en *todos* los marcos. Entonces la velocidad de la luz es realmente la misma para todos los observadores. La misma conclusión prevalece para cualquier dirección en que viaje el haz de luz; véase el problema 19.

Problema muestra 4 Una partícula es acelerada desde el reposo en el laboratorio hasta que su velocidad es de $0.60c$. Visto desde un marco que se mueva con la partícula con una velocidad de $0.60c$ con relación al laboratorio, la partícula recibe luego un incremento adicional de velocidad de $0.60c$. Halle la velocidad final de la partícula al medirla en el marco del laboratorio.

Solución Una vez más, el problema se convierte en una aplicación directa de la transformación de Lorentz de la velocidad, una vez que hayamos especificado claramente los marcos de referencia S y S' y el sistema que está siendo observado. Claramente, la partícula es el sistema que está siendo observado, y si buscamos su velocidad medida en el marco del laboratorio es natural asociarlo al laboratorio con el marco S. El marco S' es entonces el marco de referencia inercial ocupado por la partícula después de la primera aceleración y antes de la segunda (véase la Fig. 13). Con relación a este marco, la velocidad de la partícula después de la segunda aceleración es

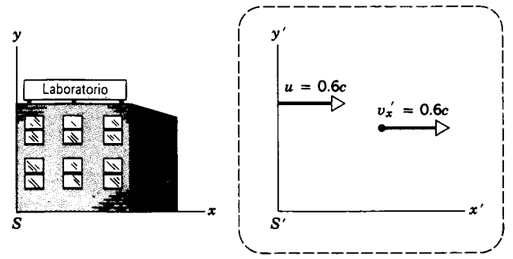


Figura 13 Problema muestra 4. S', marco de referencia de la partícula después de la primera aceleración, se mueve con velocidad $u = 0.60c$ con relación al laboratorio (marco S). Con relación a S', la partícula se mueve con una velocidad $v_x' = 0.60c$ después de su segunda aceleración.

$v_x' = 0.60c$. La velocidad del marco S' con respecto al marco S es $u = 0.60c$. Conocemos a v_x' y a u, y buscamos a v_x, la cual está dada por la transformación inversa de la velocidad a partir de la tabla 3:

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2} = \frac{0.60c + 0.60c}{1 + (0.60c)(0.60c)/c^2} = \frac{1.20c}{1.36} = 0.88c.$$

La velocidad es menor que c, en contradicción con la predicción de la transformación galileana, la cual da $v_x = 1.20c$.

Supongamos que ahora hacemos que el marco S' sea el de la partícula después de la segunda aceleración, de modo que $u = 0.88c$ con relación al marco original S (el laboratorio). Consideremos ahora una *tercera* aceleración, de modo que, con relación al nuevo marco S', la partícula se mueve nuevamente con velocidad $v_x' = 0.60c$. Repitiendo el procedimiento anterior, podemos demostrar que un observador en el marco del laboratorio (S) medirá una velocidad de $v_x' = 0.97c$ en este caso.

Sin importar cuántas veces aceleremos a la partícula en un marco de referencia que se mueva con la partícula, su velocidad medida en el marco original del laboratorio (o en cualquier otro marco) nunca superará a c.

21-7 CONSECUENCIAS DE LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Ya hemos demostrado que al aplicar los postulados de Einstein a situaciones físicas se desprenden algunas consecuencias inesperadas. Emplearemos ahora la base más matemática de la transformación de Lorentz para demostrar que pueden obtenerse estas mismas consecuencias y otras.

La relatividad del tiempo

En la sección 21-3 demostramos que el efecto de la dilatación del tiempo se deduce directamente al aplicar los postulados de Einstein a las mediciones de los intervalos de tiempo por dos observadores en movimiento relativo uno con respecto al otro. La figura 14 muestra una visión diferente del efecto de dilatación del tiempo. El reloj C' está en reposo en el marco de S', el cual se mueve con una velocidad u relativa a S. S' mide el intervalo de tiempo $\Delta t' = t_2' - t_1'$ en el que la manecilla del reloj pasa entre dos marcas, pasando la primera marca en el tiempo t_1' y la segunda en el tiempo t_2'.

El paso de la manecilla del reloj C' por las dos marcas puede ser visto como dos sucesos los cuales ocurren en la misma posición x_0' de acuerdo con S' (porque el reloj C' está en reposo en ese marco). Sin embargo, S (cuyo marco de referencia contiene un grupo estacionario de relojes sincronizados de la manera descrita en la sección 21-5) observa que la manecilla del reloj C' pasa la primera marca en la posición x_1 (donde el reloj estacionario local señala el tiempo t_1) y la segunda marca en la posición x_2 (en donde un reloj estacionario *diferente* lee el tiempo t_2). Podemos hallar la relación entre los intervalos de tiempo Δt y $\Delta t'$ directamente a partir de la transformación inversa de Lorentz. Según la tabla 2, tenemos

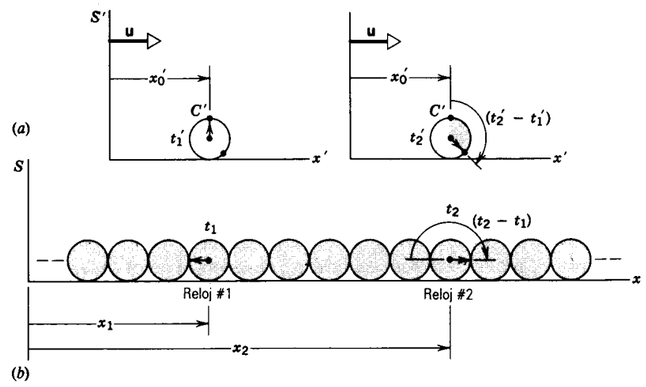
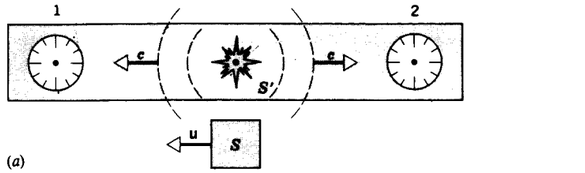
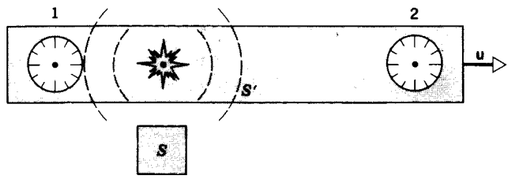


Figura 14 El reloj C' está fijo en la posición x_0' en el marco de referencia S'. El observador S, con relación al cual el reloj C' está en movimiento con velocidad $\mathbf{u}$, compara la lectura de C' con dos relojes estacionarios diferentes del arreglo de relojes sincronizados (numerados 1 y 2) establecido en el marco de S. Como se muestra, el intervalo $t_2 - t_1$ medido por S es mayor que el intervalo $t_2' - t_1'$. Por lo tanto, el observador S declara que, en comparación con los relojes situados en S, el reloj que se mueve avanza más lentamente.



(a)



(b)

Figura 15 (*a*) En el marco de referencia de S', un destello de luz emitido desde un punto a media distancia entre dos relojes llega a los relojes en el mismo instante. (*b*) En el marco de referencia de S, el destello de luz llega al reloj 1 antes que al reloj 2.

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + u\,\Delta x'/c^2). \qquad (21)$$

Esta expresión general da el intervalo de tiempo Δt medido por S correspondiente al intervalo de tiempo $\Delta t'$ medido por S' para sucesos que están separados por una distancia $\Delta x'$. De acuerdo con S', con relación al cual el reloj C' está en reposo, los dos sucesos (la manecilla al pasar las dos marcas) tienen lugar en la misma posición x_0', de modo que $\Delta x' = 0$. Puesto que S' está en reposo con relación al reloj C', el intervalo de tiempo $\Delta t'$ medido por S' es un intervalo de tiempo propio, el cual representamos como Δt_0. Sustituyendo $\Delta x' = 0$ y $\Delta t' = \Delta t_0$ en la ecuación 21, obtenemos

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

la cual es idéntica a la ecuación 3, la ecuación de la dilatación del tiempo.

El efecto de la dilatación del tiempo es completamente simétrico. Si un reloj C en reposo en S es observado por S', entonces S' concluye que el reloj C avanza más lentamente. Cada observador cree que el otro reloj está avanzando más lentamente que los que están en reposo en el marco de referencia del observador. La dilatación del tiempo suele resumirse en la idea de que en "los relojes en movimiento que se atrasan". Es útil recordar esta frase, pero hay que hacerlo con precaución. La frase indica que un reloj que se mueve con relación a un marco que contiene un arreglo de relojes sincronizados se atrasa *cuando el tiempo es medido por aquellos relojes*. Es decir, podemos afirmar que "los relojes en movimiento se atrasan" únicamente en el sentido de comparar a un reloj en movimiento con dos relojes estacionarios sincronizados separados.

Consideremos otras tres consecuencias de la transformación de Lorentz que se relacionan con las mediciones de tiempo:

1. *La relatividad de la simultaneidad.* Supongamos que S' tiene dos relojes en reposo, situados en x_1' y x_2', y separados por el intervalo $\Delta x' = x_2' - x_1'$. Un destello de luz emitido desde un punto a media distancia entre los relojes llega a los dos relojes simultáneamente, de acuerdo con S' (véase la Fig. 15*a*). Es decir, una medición hecha por S' del intervalo entre la llegada de las señales de luz a los dos relojes da $\Delta t' = 0$. Consideremos ahora la situación desde el punto de vista de S, con relación al cual el marco de S' (incluyendo a los relojes) se mueve con velocidad u (Fig. 15*b*). Claramente, la señal luminosa llega al reloj 1 antes de llegar al reloj 2, y entonces la llegada de las señales luminosas a las ubicaciones de los dos relojes *no* es simultánea para S. Por lo tanto, llegamos a la siguiente conclusión:

> *Si dos observadores están en movimiento relativo, en general no concuerdan en si los sucesos en ubicaciones diferentes son simultáneos. Si un observador halla que los dos sucesos son simultáneos, el otro no.*

Esta conclusión se desprende también directamente de la ecución 21: si $\Delta t' = 0$ y $\Delta x' \neq 0$, entonces $\Delta t \neq 0$. Obsérvese que esto ocurre únicamente cuando los dos sucesos tienen lugar en ubicaciones diferentes de acuerdo con S'. Si los dos sucesos tienen lugar en la misma ubicación y son simultáneos de acuerdo con S', son igualmente simultáneos para S.

2. *El corrimiento Doppler.* En la sección 20-7 consideramos el efecto Doppler en las ondas sonoras, en donde el movimiento de una fuente o de un observador de las ondas con relación al medio que transporta a las ondas causa un cambio en la frecuencia medida por el observador.

En el caso de las ondas de luz, "el movimiento relativo al medio" no es un concepto válido. La relatividad especial da un corrimiento Doppler para la luz que depende

únicamente de la velocidad relativa entre la fuente y el observador; en contraste con el caso de las ondas sonoras, donde usamos fórmulas diferentes para tener en cuenta los movimientos de la fuente y del observador, en el caso de las ondas de luz es suficiente una fórmula que involucre únicamente al movimiento *relativo*. La fórmula Doppler relativista es, por lo tanto, más sencilla de aplicar que la clásica.

Otro aspecto del efecto Doppler en la relatividad especial no tiene una contraparte clásica. Se trata del *efecto Doppler transversal*, el cual, en contraste con los casos considerados en la sección 20-7, ocurre cuando la fuente o el observador se mueven perpendicularmente a la línea que los une. El efecto Doppler transversal es realmente otro resultado de la dilatación del tiempo, y las mediciones precisas del efecto Doppler transversal dan algunas de las pruebas experimentales más sensibles de la dilatación del tiempo. Consideraremos el efecto Doppler para la luz con más detalle en el capítulo 42.

3. *La paradoja de los gemelos.* La dilatación del tiempo se aplica no solamente a las partículas elementales sino a todos los intervalos de tiempo que ocurren de manera natural, incluyendo la cantidad de las pulsaciones y la duración de la vida humana. Este hecho ha sido usado para proponer un acertijo aparente que ha llegado a ser conocido como la *paradoja de los gemelos*.*

Supongamos a dos gemelos, Federico y Etelvina, que están en una plataforma situada en el espacio. Etelvina se embarca para un viaje en un vehículo espacial de alta velocidad hasta una estrella distante mientras que Federico permanece en la plataforma. Durante el viaje de Etelvina, Federico es capaz de registrar los latidos del corazón y el ritmo de respiración promedio de Etelvina, y halla que son más lentos debido al efecto de la dilatación del tiempo; entonces, todo el proceso de envejecimiento de Etelvina se ha hecho más lento. Por lo tanto, Federico espera que, al regresar Etelvina a la plataforma después de su viaje a la estrella, ella sea más joven que él.

La paradoja ocurre de manera similar cuando analizamos la situación desde el marco de referencia de Etelvina, viendo por lo tanto a Federico y a la plataforma como los que hacen el viaje. De acuerdo con este análisis, Federico es el gemelo viajero y debería ser el más joven al final del viaje. He aquí la paradoja: Cuando se encuentren al final del viaje, no puede ser cierto que Etelvina sea más joven que Federico como tampoco que Federico sea más joven que Etelvina.

La resolución de la paradoja llega cuando pensamos que Federico y Etelvina no están realmente en situaciones simétricas. Al reunirse nuevamente los dos gemelos, uno de ellos debe decelerar e invertir direcciones, dando por resultado una aceleración, fácilmente medible, de uno de ellos. Dicho de otra manera, Etelvina debe cambiar de un marco de referencia inercial (el que se aleja de Federico) a otro (el que se mueve hacia Federico). Por otra parte, Federico no experimenta una aceleración y permanece en el mismo marco de referencia inercial durante toda la duración del viaje. Realmente, es Etelvina la viajera y quien será más joven a su regreso.

Si bien no hemos sido capaces de llevar a cabo un experimento de esta clase con gemelos reales, el experimento ha podido efectuarse con relojes atómicos.* Dos relojes idénticos fueron calibrados cuidadosamente; uno de ellos fue colocado en un avión comercial en vuelo alrededor del mundo y comparado con su gemelo "en casa" a su retorno. La velocidad durante tal viaje fue, por supuesto, bastante menor que c, pero los relojes atómicos son capaces de una precisión suficiente como para que la pequeña asimetría resultante en el "envejecimiento" de los dos relojes, que llegó a unos 10^{-7} s, pueda determinarse precisa y fácilmente. Se encontró que el reloj que se colocó en el avión, que fue el sometido a una aceleración y por lo tanto el verdadero viajero, era realmente "más joven" (es decir, se atrasó) después del viaje.

La lectura que marca el reloj que viajó en el avión debe ser también corregida respecto al tiempo que pasa en potencial gravitatorio diferente, un efecto de la relatividad *general*. Así pues, las correcciones para la relatividad general y especial son de interés práctico e importante cuando relojes de esa precisión son transportados de un lugar a otro.

La relatividad de la longitud

De las ecuaciones de transformación de Lorentz se deduce directamente la contracción de la longitud, la cual se estudió en la sección 21-3. Advirtamos primero que para medir la longitud de un objeto debemos llevar a cabo una determinación *simultánea* de las coordenadas de los extremos del objeto (véase la Fig. 16). *No tiene caso medir la coordenada de un extremo de un objeto en movimiento en un tiempo determinado y la coordenada del otro extremo en un tiempo diferente.*

Supongamos (véase la Fig. 17) que una barra de medición de la longitud en reposo L_0 sea transportada por S'. El observador S desea medir su longitud. Según S', en cuyo marco de referencia la barra está en reposo, los extremos de la barra están en las coordenadas x_2' y x_1', de

* Para mayores detalles sobre la paradoja de los gemelos, véase *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, 2a. edición, por Robert Resnick y David Halliday (Wiley, 1985), pág 281.

* Véase "Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains", por J. C. Hafele y Richard E. Keating, *Science*, julio 14, 1972, pág. 166.

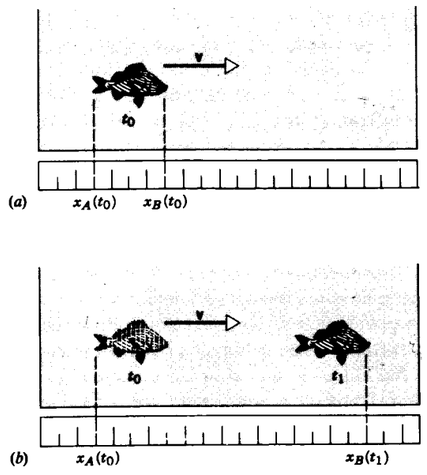


Figura 16 (*a*) Para medir la longitud de un pez en movimiento, debemos determinar *simultáneamente* las posiciones de su cabeza y de su cola. (*b*) Si la determinación no es simultánea, la medición no da la longitud.

modo que $\Delta x' = x_2' - x_1' = L_0$, la longitud en reposo de la barra. El observador S, usando las coordenadas calibradas y sincronizadas establecidas de acuerdo con el procedimiento descrito en la sección 21-5, lleva a cabo una determinación simultánea de las coordenadas x_2 y x_1 de los extremos de la barra. El intervalo $\Delta x = x_2 - x_1$ da la longitud L de la barra de acuerdo con S. Partiendo de la ecuación del intervalo en la tabla 2, tenemos

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\,\Delta t). \tag{22}$$

Haciendo que $\Delta t = 0$ (porque S llevó a cabo una determinación *simultánea* de x_2 y x_1), resolvemos para Δx (= L) y obtenemos

$$L = \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - u^2/c^2}\,,$$

que es idéntica a la ecuación 8.

Hemos deducido la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud, ambos a partir de los postulados (sección 21-3) y de la transformación de Lorentz (esta sección). Sin embargo, no se trata de derivaciones independientes porque la transformación de Lorentz en sí misma se obtiene a partir de los postulados. Al fin y al cabo, toda la relatividad especial se deriva directamente de los postulados de Einstein.

Al igual que la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud es un efecto que rige para todos los observadores en movimiento relativo. Preguntas tales como "¿*Realmente* se contrae una barra de medición en movimiento?" tienen significado únicamente en el sentido de

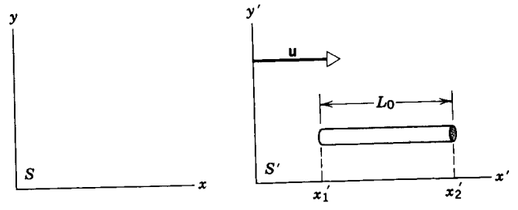


Figura 17 Los extremos de una barra de medición se determinan en las coordenadas x_1' y x_2' de acuerdo con S', con relación al cual la barra está en reposo. Para determinar la longitud de la barra, S debe hacer una determinación *simultánea* de las coordenadas x_1 y x_2 de los puntos extremos.

que se refieran a mediciones efectuadas por observadores en movimiento relativo. La esencia de la relatividad es que los resultados de las mediciones de la longitud y del tiempo están sujetos al estado de movimiento del observador con relación al suceso que está siendo medido y se refieren únicamente a las mediciones efectuadas por un observador en particular en un marco de referencia en particular. Si diferentes observadores llevasen la barra al reposo en sus marcos inerciales individuales, cada uno mediría el mismo valor de la longitud de la barra. A este respecto, la relatividad especial es una teoría de la medición que dice simplemente que "el movimiento afecta a la medición".

Problema muestra 5 Un observador S está parado sobre una plataforma de longitud D_0 = 65 m en una estación espacial. Un cohete pasa con una velocidad relativa de 0.80c moviéndose paralelamente al borde de la plataforma. El observador S nota que las partes anterior y posterior del cohete se alinean simultáneamente con los extremos de la plataforma en un instante en particular (Fig. 18*a*). (*a*) De acuerdo con S, ¿cuál es el tiempo necesario para que el cohete pase por un punto en particular de la plataforma? (*b*) ¿Cuál es la longitud en reposo L_0 del cohete? (*c*) De acuerdo con un observador S' situado en el cohete, ¿cuál es la longitud D de la plataforma? (*d*) De acuerdo con S', ¿cuánto tiempo transcurre para que el observador S pase la longitud entera del cohete? (*e*) De acuerdo con S, los extremos del cohete se alinean simultáneamente con los extremos de la plataforma. ¿Son estos eventos simultáneos para S'?

Solución (*a*) De acuerdo con S, la longitud L del cohete es igual a la longitud D_0 de la plataforma. S mide que el tiempo para que el cohete pase por un punto en particular es

$$\Delta t_0 = \frac{L}{0.80c} = \frac{65\text{ m}}{2.40 \times 10^8\text{ m/s}} = 0.27\ \mu\text{s}.$$

Éste es un intervalo de tiempo propio, porque S está midiendo el intervalo de tiempo entre dos sucesos que acontecen en el mismo punto en el marco de referencia de S (la parte anterior del cohete pasa por un punto, y luego la parte posterior del cohete pasa por el mismo punto).

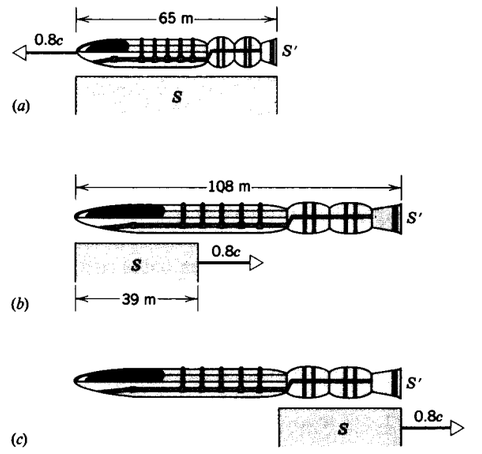


Figura 18 Problema muestra 5. (*a*) Desde el marco de referencia de S en reposo en la plataforma, el cohete está alineado, al pasar, simultáneamente con las partes anterior y posterior de la plataforma. (*b*,*c*) Desde el marco de referencia del cohete, al pasar éste junto a la plataforma, ésta queda alineada primero con la parte anterior del cohete y después con la parte posterior. Nótense los efectos diferentes de la contracción de la longitud en los dos marcos de referencia.

(*b*) S mide la longitud contraída L del cohete. Podemos hallar su longitud en reposo L_0 usando la ecuación 8:

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{65\text{ m}}{\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 108\text{ m}.$$

(*c*) De acuerdo con S la plataforma está en reposo, de modo que 65 m es la longitud de reposo D_0. Por lo tanto, de acuerdo con S', la longitud contraída de la plataforma es

$$D = D_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = (65\text{ m})\sqrt{1 - (0.80)^2} = 39\text{ m}.$$

(*d*) Para que S pase la longitud entera del cohete, S' concluye que S debe moverse una distancia igual a su longitud en reposo, o sea 108 m. El tiempo necesario para hacerlo es

$$\Delta t' = \frac{108\text{ m}}{0.80c} = 0.45\ \mu\text{s}.$$

Obsérvese que éste *no es* un intervalo de tiempo propio para S', quien determina este intervalo de tiempo usando un reloj en el frente del cohete para medir el tiempo en el cual S pasa por el frente del cohete, y otro reloj en la parte trasera del cohete para medir el tiempo en el cual S pasa por la parte trasera del cohete. Por lo tanto, los dos sucesos ocurren en puntos diferentes de S' y entonces no pueden estar separados por un tiempo propio en S'. El intervalo de tiempo correspondiente medido por S para los mismos dos sucesos, el cual fue calculado en la parte (*a*), *es* un intervalo de tiempo propio para S, porque los dos sucesos *realmente* ocurren en el mismo punto de S. Los intervalos de tiempo medidos por S y S' estarían relacionados por la fórmula de la dilatación del tiempo:

$$\Delta t' = \gamma\,\Delta t = \frac{0.27\ \mu\text{s}}{\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 0.45\ \mu\text{s},$$

de acuerdo con el valor calculado arriba de la longitud propia del cohete en S'.

(*e*) Según S', el cohete tiene una longitud en reposo de L_0 = 108 m y la plataforma tiene una longitud contraída de D = 39 m. No existe entonces una manera de que S' pueda observar los dos extremos de ambos para alinearlos simultáneamente. En las figuras 18*b* y 18*c* se ilustra la secuencia de sucesos de acuerdo con S'. El intervalo de tiempo $\Delta t'$ en S' entre los dos eventos que son simultáneos en S puede calcularse a partir de la ecuación del intervalo para $\Delta t'$ en la tabla 2 siendo $\Delta t = 0$, lo cual da

$$\Delta t' = -\gamma u\,\Delta x/c^2 = \frac{-(0.80c)(-65\text{ m})}{c^2\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 0.29\ \mu\text{s}.$$

Podemos verificar este resultado observando que, de acuerdo con S', el intervalo de tiempo entre las situaciones mostradas en las figuras 18*b* y 18*c* debe ser el necesario para que la plataforma se mueva una distancia de 108 m - 39 m = 69 m, lo cual toma un tiempo

$$\Delta t' = \frac{69\text{ m}}{0.80c} = 0.29\ \mu\text{s},$$

de acuerdo con el valor calculado a partir de la transformación del intervalo. Este último resultado ilustra la relatividad de la simultaneidad: dos sucesos que sean simultáneos para S (el alineamiento de los dos extremos del cohete con los dos extremos de la plataforma) *no pueden* ser simultáneos para S'.

21-8 ÍMPETU RELATIVISTA

Hasta ahora hemos investigado el efecto de los dos postulados de Einstein sobre las variables cinemáticas de tiempo, desplazamiento y velocidad vistas desde dos marcos inerciales diferentes. En esta sección y en la próxima ampliaremos nuestros esfuerzos para incluir las variables dinámicas de —ímpetu y energía. Aquí discutiremos la visión relativista del ímpetu lineal.

Consideremos la colisión mostrada en la figura 19*a*, vista desde el marco de referencia S. Dos partículas, cada una de masa m, se mueven con velocidades v y $-v$ iguales y opuestas a lo largo del eje x. Colisionan en el origen, y la distancia entre sus líneas de aproximación ha sido ajustada de modo que después de la colisión las partículas se muevan a lo largo del eje y con velocidades finales iguales y opuestas (figura 19*b*). Suponemos que la colisión es perfectamente elástica, de modo que no se pierda ninguna energía cinética. Las velocidades finales deben ser entonces v y $-v$.

Usando la fórmula clásica ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$), las componentes del ímpetu del sistema de dos partículas en el marco S son

$$\text{Inicial:}\quad p_{xi} = mv + m(-v) = 0,\qquad p_{yi} = 0.$$

$$\text{Final:}\quad p_{xf} = 0,\qquad p_{yf} = mv + m(-v) = 0.$$

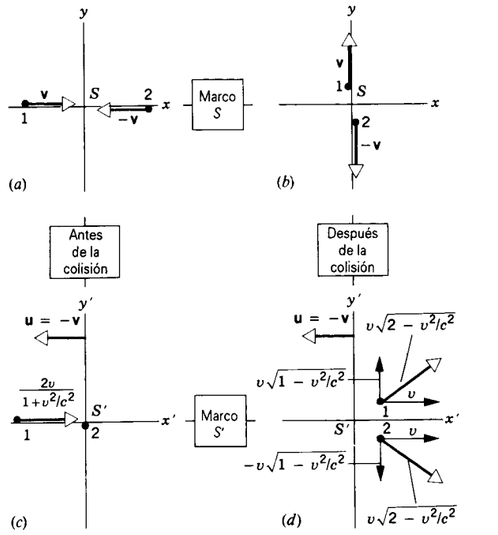


Figura 19 Se muestra una colisión entre dos partículas de la misma masa (*a*) antes de la colisión en el marco de referencia de *S*; (*b*) después de la colisión en el marco de referencia de *S*; (*c*) antes de la colisión en el marco de referencia de *S*′, y (*d*) después de la colisión en el marco de referencia de *S*′.

Entonces $p_{xi} = p_{xf}$ y $p_{yi} = p_{yf}$; el ímpetu (vectorial) inicial es igual al ímpetu final, y el ímpetu se conserva en el marco *S*.

Veamos ahora a la misma colisión desde el marco *S*′, el cual se mueve en relación al marco *S* con velocidad $u = -v$ (Fig. 19*c*). Obsérvese que en el marco *S*′, la partícula 2 está en reposo antes de la colisión. Usaremos la trasformación de Lorentz de la velocidad, ecuaciones 18 y 19, para hallar las componentes *x*′ y *y*′ transformadas de las velocidades inicial y final, como serían observadas por *S*′. Estos valores, que usted debería calcular, se muestran en las figuras 19*c* y 19*d*.

Usaremos ahora aquellas velocidades para hallar las componentes del ímpetu del sistema en el marco *S*′:

$$p'_{xi} = m\left(\frac{2v}{1+v^2/c^2}\right) + m(0) = \frac{2mv}{1+v^2/c^2},$$

$$p'_{yi} = 0,$$

$$p'_{xf} = mv + mv = 2mv,$$

$$p'_{yf} = mv\sqrt{1-v^2/c^2} + m(-v\sqrt{1-v^2/c^2}) = 0.$$

Vemos que p'_{xi} *no* es igual a p'_{xf}, y *S*′ concluirá que el ímpetu *no* se conserva.

Resulta claro del cálculo anterior que la ley de la conservación del ímpetu lineal, la cual hemos hallado útil en una variedad de aplicaciones, no satisface el primer postulado de Einstein (la ley debe ser la misma en todos los marcos inerciales) si calculamos al ímpetu como $p = mv$. Por lo tanto, *si hemos de retener a la conservación del ímpetu como una ley general consistente con el primer postulado de Einstein, debemos hallar una nueva definición del ímpetu*. Esta nueva definición del ímpetu debe tener dos propiedades: (1) Debe hacer que la ley de conservación del ímpetu satisfaga al principio de relatividad; es decir, si el ímpetu se conserva de acuerdo con un observador en un marco inercial, entonces se conserva de acuerdo con los observadores en *todos* los marcos inerciales. (2) A bajas velocidades, la nueva definición debe reducirse a $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, la cual sabemos que funciona perfectamente bien en el caso no relativista.

La fórmula relativista para el ímpetu de una partícula de masa *m* que se mueva con velocidad **v** es

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{23}$$

la cual ya hemos presentado en la ecuación 22 del capítulo 9. En términos de las componentes, podemos escribir a la ecuación 23 así:

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{y} \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{24}$$

La velocidad v que aparece en el denominador de estas expresiones es *siempre* la velocidad de la partícula medida en un marco inercial en particular. *No es* la velocidad de un marco inercial. La velocidad en el numerador puede ser cualquiera de las componentes del vector velocidad.

Veamos ahora cómo esta nueva definición restablece la conservación del ímpetu en la colisión que hemos considerado. En el marco *S*, las velocidades antes y después son iguales y opuestas, y entonces la ecuación 23 da de nuevo cero para los ímpetus inicial y final. En el marco *S*′, podemos usar las magnitudes de las velocidades como aparecen en las figuras 19*c* y 19*d* para obtener, como usted debe comprobar,

$$p'_{xi} = p'_{xf} = \frac{2mv}{1-v^2/c^2},$$
$$p'_{yi} = p'_{yf} = 0. \tag{25}$$

Así, los ímpetus inicial y final son iguales en el marco *S*′. El ímpetu se conserva tanto en el marco *S* como en el *S*′. De hecho la definición del ímpetu dada en la ecuación 23 da la conservación del ímpetu en *todos* los marcos inerciales, como lo exige el principio de relatividad.

Obsérvese también que, en la región de velocidades bajas, el denominador de la ecuación 23 es casi igual a 1; a velocidades bajas la ecuación 23 se reduce a la familiar fórmula clásica $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Entonces, la ecuación 23 satisface también este criterio necesario de las fórmulas relativistas.

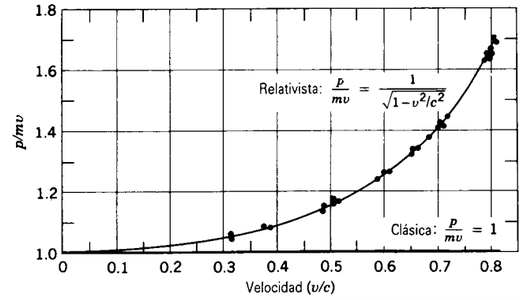


Figura 20 Se traza la razón p/mv para electrones con varias velocidades. De acuerdo con la física clásica, $p = mv$, y entonces las ecuaciones clásicas predicen que $p/mv = 1$. Los datos concuerdan claramente con el resultado relativista y no con el resultado clásico. A velocidades bajas, las predicciones clásica y relativista no pueden distinguirse.

Por supuesto, la prueba decisiva es la concordancia con el experimento. La figura 20 muestra una colección de datos, basados en determinaciones independientes del ímpetu y la velocidad de los electrones. Los datos se trazan según la relación p/mv, la cual debe tener el valor constante de 1 según la física clásica. Los resultados concuerdan con la ecuación relativista y no con la clásica. Obsérvese que las predicciones clásica y relativista concuerdan para velocidades bajas, y de hecho la diferencia entre las dos no es precisamente aparente hasta que la velocidad supera a $0.1c$, lo cual explica nuestra incapacidad para observar las correcciones relativistas en los experimentos con objetos ordinarios del laboratorio.

Problema muestra 6 ¿Cuál es el ímpetu de un protón que se mueve con una velocidad de $v = 0.86c$?

Solución Usando la ecuación 23, obtenemos

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
$$= \frac{(1.67\times10^{-27}\ \text{kg})(0.86)(3.00\times10^{8}\ \text{m/s})}{\sqrt{1-(0.86)^2}}$$
$$= 8.44\times10^{-19}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

Las unidades de kg · m/s no son generalmente convenientes para resolver problemas de este tipo. En su lugar, manipulamos la ecuación 23 para obtener

$$pc = \frac{mcv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mc^2(v/c)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{(938\ \text{MeV})(0.86)}{\sqrt{1-(0.86)^2}}$$
$$= 1580\ \text{MeV}.$$

Aquí hemos usado la *energía en reposo* mc^2 del protón, un concepto que introdujimos en la sección 8-7. El ímpetu se obtiene a partir de este resultado al dividir entre el símbolo c (no entre su valor numérico), lo cual da

$$p = 1580\ \text{MeV}/c.$$

Las unidades de MeV/*c* para el ímpetu se usan a menudo en los cálculos relativistas porque, como lo demostraremos en la sección siguiente, la cantidad *pc* aparece a menudo en estos cálculos. Usted debe ser capaz de convertir MeV/*c* a kg · m/s y demostrar que los dos resultados obtenidos para *p* son equivalentes.

21-9 ENERGÍA RELATIVISTA

La relación entre la masa y la energía desde el punto de vista relativista se trató previamente en la sección 8-7. Puede usted encontrar útil revisar esa discusión antes de que continúe leyendo esta sección.

En analogía con nuestra discusión del momento en la sección anterior, la relatividad especial da un acceso diferente a la energía cinética. Indiquemos primero la dificultad al reconsiderar la colisión mostrada en la figura 19. Si usamos la expresión clásica $\frac{1}{2}mv^2$, la colisión no conserva la energía cinética en el marco *S*′. (Escogimos las velocidades finales en el marco *S* de modo que la energía cinética se conservara.) Usando las velocidades mostradas en las figuras 19*c* y 19*d*, podemos demostrar que (véase el problema 46), con $K = \frac{1}{2}mv^2$,

$$K'_i = \frac{2mv^2}{(1+v^2/c^2)^2},$$
$$K'_f = mv^2(2-v^2/c^2). \tag{26}$$

Entonces K_i' no es igual a K_f', y la colisión elástica aparentemente no conserva la energía cinética en *S*′. Esta situación viola el postulado de relatividad; el tipo de colisión (elástica contra inelástica) debería depender de las propiedades de los objetos que chocan y no del marco de referencia particular desde el cual contemplamos la colisión. Como en el caso del ímpetu, requerimos de una nueva definición de la energía cinética si hemos de preservar la ley de la conservación de la energía y el postulado de relatividad.

La expresión clásica para la energía cinética viola también el segundo postulado de la relatividad al permitir velocidades que superan la velocidad de la luz. No existe un límite (ni en la dinámica clásica ni en la relativista) para la energía que podemos impartir a una partícula. Sin embargo, si permitimos que la energía cinética crezca sin límite, la expresión clásica $K = \frac{1}{2}mv^2$ implica que la velocidad debe aumentar correspondientemente sin límite, violando, por lo tanto, el segundo postulado. Por lo tanto, debemos encontrar una manera de redefinir la energía cinética, con el fin de que la energía cinética de una partícula pueda aumentar sin límite mientras su velocidad permanezca menor que *c*.

La expresión relativista para la energía cinética de una partícula puede derivarse usando, esencialmente, el mismo procedimiento que empleamos para derivar la expre-

sión clásica, comenzando con el teorema trabajo-energía en su forma aplicable a partículas (véase el problema 54). El resultado de este cálculo es

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2. \tag{27}$$

La ecuación 27 se ve muy diferente del resultado clásico $\frac{1}{2}mv^2$, pero, como lo demostramos en la sección 7-7, la ecuación 27 se reduce a la expresión clásica en el límite de bajas velocidades ($v \ll c$). Podemos también ver a partir del primer término de la ecuación 27 que $K \to \infty$ cuando $v \to c$. Entonces podemos aumentar sin límite la energía cinética de una partícula y su velocidad no superará a c.

Podemos también expresar la ecuación 27 como:

$$K = E - E_0, \tag{28}$$

donde la *energía relativista total* E se define como

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{29}$$

y la *energía en reposo* E_0 se define como

$$E_0 = mc^2. \tag{30}$$

La energía en reposo es en efecto la energía relativista total de una partícula medida en un marco de referencia en el que la partícula esté en reposo.

La energía relativista total está dada por la ecuación 28 como

$$E = K + E_0. \tag{31}$$

En interacciones de partículas a velocidades relativistas, podemos reemplazar nuestro principio de conservación de la energía previo por uno basado en la energía relativista total:

En un sistema de partículas aislado, la energía relativista total permanece constante.

Este principio es un caso especial del resultado expresado previamente en la forma de la ecuación 36 del capítulo 8 ($\Delta E_0 + \Delta K = W$), donde $W = 0$ (es decir, el sistema está aislado: su entorno no efectúa ningún trabajo externo).

Usando la forma relativista de la energía cinética dada por la ecuación 27, podemos demostrar que la energía cinética se conserva en el marco S' de la colisión de la figura 19 (véase el problema 47). Puesto que las energías en reposo de las partículas inicial y final son iguales en esta colisión, la conservación de la energía relativista total es equivalente a la conservación de la energía cinética. En general, las colisiones de partículas a altas energías pueden dar por resultado la producción de nuevas partículas, y entonces la energía en reposo final puede no ser igual a la energía en reposo inicial (véase el problema muestra 9). Tales colisiones deben analizarse usando la conservación de la energía relativista total E; la energía cinética no se conserva cuando la energía en reposo cambia en una colisión.

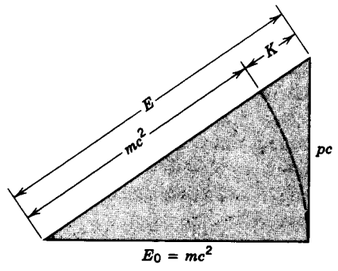


Figura 21 Un recurso mnemotécnico útil para recordar las relaciones entre E_0, p, K, y E. Obsérvese que debe emplearse la cantidad pc para poner todas las variables en unidades de energía.

A menudo, la m de la ecuación 30 se llama *masa en reposo* m_0 y se distingue de la "masa relativista", que se define como $m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Elegimos no emplear la masa relativista, porque puede ser un concepto que nos lleve a confusión. Cuando nos refiramos a la masa, siempre querremos significar masa en reposo.

La manipulación de las ecuaciones 23 y 29 da una relación útil entre la energía total, el ímpetu, y la energía en reposo:

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}. \tag{32}$$

La figura 21 muestra un recurso mnemotécnico para recordar esta relación, la cual tiene la forma del teorema de Pitágoras para los lados de un triángulo rectángulo.

Las relaciones entre la energía cinética y la velocidad, y entre la energía cinética y el ímpetu pueden probarse en un régimen relativista por medio de partículas aceleradas a altas velocidades o usando partículas de alta velocidad (es decir, electrones) emitidos en ciertos procesos de desintegración radiactiva. La figura 2 muestra electrones a los que se les da una energía cinética conocida (usando una terminal eléctrica de alto voltaje) cuyas velocidades resultantes fueron medidas. Los datos experimentales concuerdan perfectamente con la expresión relativista y no concuerdan con la expresión clásica. Hoy día se obtienen resultados similares indirectamente en cualquier instalación que posea un acelerador grande. Las partículas son aceleradas a velocidades muy cercanas a c, y los parámetros de diseño de los aceleradores deben basarse en la dinámica relativista. Así pues, cada acelerador moderno es, en efecto, un laboratorio para probar la relatividad especial. No es necesario decir que el éxito de estos aceleradores es una confirmación contundente de la relatividad especial.

Problema muestra 7 En el Stanford Linear Collider* se aceleran electrones a una energía cinética de 50 GeV. Halle la velocidad de un electrón como (*a*) una fracción de c y (*b*) una diferencia con c. La energía en reposo del electrón es de 0.511 MeV = 0.511×10^{-3} GeV.

Solución (*a*) Primero, resolvemos la ecuación 27 para v, obteniendo

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + K/mc^2)^2}}, \tag{33}$$

y entonces

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 50\ \text{GeV}/0.511 \times 10^{-3}\ \text{GeV})^2}}$$
$$= 0.999\ 999\ 999\ 948c.$$

Las calculadoras no son confiables después de 12 cifras significativas. He aquí una manera de evitar esta dificultad. Podemos escribir la ecuación 33 como $v = c(1 + x)^{1/2}$, en donde $x = -1/(1 + K/mc^2)^2$. Puesto que $K \gg mc^2$, tenemos que $x \ll 1$, y podemos emplear la expansión binómica para escribir $v \approx c(1 + \frac{1}{2}x)$, o sea

$$v \approx c\left[1 - \frac{1}{2(1 + K/mc^2)^2}\right], \tag{34}$$

lo cual da

$$v = c(1 - 5.2 \times 10^{-11}).$$

Esto conduce al valor de v dado arriba.

(*b*) Partiendo del resultado anterior, tenemos

$$c - v = 5.2 \times 10^{-11}c = 0.016\ \text{m/s} = 1.6\ \text{cm/s}.$$

Problema muestra 8 Cierto acelerador produce un haz de kaones neutros ($m_K c^2$ = 498 MeV) con una energía cinética de 325 MeV. Consideremos a un kaón que se desintegra en vuelo en dos piones ($m_\pi c^2$ = 140 MeV). Halle la energía cinética de cada pión en el caso especial en que los piones viajen paralela o antiparalelamente en dirección del haz de kaones.

Solución La energía de las partículas que permanecen después de la desintegración puede obtenerse aplicando los principios de conservación de la energía y del ímpetu relativistas totales. La energía relativista inicial total es, según la ecuación 31,

$$E_K = K + m_K c^2 = 325\ \text{MeV} + 498\ \text{MeV} = 823\ \text{MeV}.$$

El ímpetu inicial puede hallarse a partir de la ecuación 32:

$$p_K c = \sqrt{E_K^2 - (m_K c^2)^2} = \sqrt{(823\ \text{MeV})^2 - (498\ \text{MeV})^2}$$
$$= 655\ \text{MeV}.$$

La energía total del sistema final que consiste en los dos piones es

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{(p_1 c)^2 + (m_\pi c^2)^2} + \sqrt{(p_2 c)^2 + (m_\pi c^2)^2}$$
$$= 823\ \text{MeV}, \tag{35}$$

la que, por conservación de la energía relativista total, hemos igualado con la energía inicial total de 823 MeV. Así, tenemos una ecuación con las dos incógnitas p_1 y p_2.

Para obtener una segunda ecuación con las dos incógnitas aplicamos la conservación del ímpetu. El ímpetu final del sistema de dos piones a lo largo de la dirección del haz es $p_1 + p_2$, y haciéndolo igual al ímpetu inicial p_K da

$$p_1 c + p_2 c = p_K c = 655\ \text{MeV}. \tag{36}$$

Tenemos ahora dos ecuaciones (ecuaciones 35 y 36) con las dos incógnitas p_1 y p_2. Resolviendo la ecuación 36 para $p_2 c$ y sustituyendo este resultado en la ecuación 35, obtenemos (después de cierta manipulación algebraica) una ecuación cuadrática para $p_1 c$, la cual puede resolverse por medio de las técnicas algebraicas normales para dar

$$p_1 c = 668\ \text{MeV or} -13\ \text{MeV}.$$

Puesto que las designaciones 1 y 2 de los dos piones son arbitrarias, la solución da un pión que viaja paralelo al haz con un ímpetu p_1 = 668 MeV/c, mientras que el otro pión viaja en dirección opuesta con un ímpetu p_2 = −13 MeV/c. Las energías cinéticas correspondientes se hallan empleando las ecuaciones 28 y 32, lo cual da

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (m_\pi c^2)^2} - m_\pi c^2$$
$$K_1 = \sqrt{(668\ \text{MeV})^2 + (140\ \text{MeV})^2} - 140\ \text{MeV} = 543\ \text{MeV},$$
$$K_2 = \sqrt{(-13\ \text{MeV})^2 + (140\ \text{MeV})^2} - 140\ \text{MeV} = 0.6\ \text{MeV}.$$

Este problema puede ser resuelto también de una manera diferente llevando a cabo una transformación de Lorentz a un marco de referencia en el que los kaones están en reposo. Los dos piones son emitidos en este marco en direcciones opuestas (porque el ímpetu total debe ser cero), y por lo tanto comparten por igual la energía de la desintegración. Al transformar de regreso al marco del laboratorio tenemos entonces la solución para los ímpetus y las energías (véase el problema 57). En el siguiente problema muestra tenemos otra aplicación de esta técnica.

Problema muestra 9 El descubrimiento del antiprotón $\bar{p}$ (una partícula con la misma energía en reposo que un protón, 938 MeV, pero con la carga eléctrica opuesta) tuvo lugar en 1956 en Berkeley mediante la reacción siguiente:

$$p + p \to p + p + p + \bar{p},$$

en la que protones acelerados incidían sobre un blanco de protones en reposo en el laboratorio. La energía cinética incidente mínima necesaria para producir la reacción se llama energía cinética *umbral*, bajo la cual las partículas finales se mueven juntas como si fuesen una sola unidad. Halle el umbral de la energía cinética para producir antiprotones en esta reacción.

Solución Este problema es conceptualmente el caso inverso del problema muestra anterior. Aquí las partículas se juntan para formar una compuesta. Demostramos un método alternativo de solución en el marco de referencia del centro de masa, en donde los dos protones chocan con ímpetus iguales y opuestos para formar una nueva partícula en reposo (Fig. 22).

La energía relativista final total en el marco S' del centro de masa es la energía en reposo de los productos, los cuales se producen en reposo en este marco, de modo que

* Véase "The Stanford Linear Collider", por John R. Rees, *Scientific American*, octubre de 1989, pág. 58.

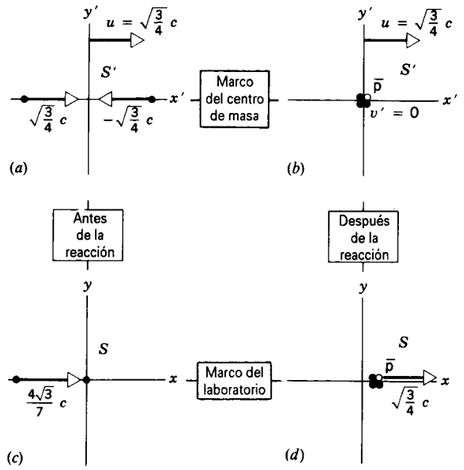


Figura 22 Problema muestra 9. Producción de un antiprotón, visto desde (*a*,*b*) el marco del centro de masa y (*c*,*d*) el marco del laboratorio. Compárese con la figura 19.

$$E_f' = 4m_pc^2.$$

La energía inicial es precisamente la suma de las energías totales de los dos protones reactantes:

$$E_i' = E_1' + E_2'.$$

La conservación de la energía requiere que $E_i' = E_f'$, y puesto que las energías E_1' y E_2' son iguales en el marco S', tenemos

$$E_1' = E_2' = 2m_pc^2.$$

La magnitud correspondiente de la velocidad de cualquier protón reactante en el marco S' se halla al resolver la ecuación 29 para v/c, lo cual da

$$\frac{v_1'}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_pc^2}{E_1'}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Efectuamos ahora una transformación de Lorentz de nuevo en el laboratorio usando esta velocidad como la de la transformación, la cual lleva uno de los protones al reposo y da al otro una velocidad v que puede ser obtenida a partir de la expresión de la transformación inversa de la velocidad para v_x a partir de la tabla 3. Usando $v' = c\sqrt{3/4}$ y $u = c\sqrt{3/4}$, y suprimiendo el subíndice x, tenemos que

$$v = \frac{v' + u}{1 + uv'/c^2} = \frac{2c\sqrt{3/4}}{1 + (\sqrt{3/4})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}c.$$

Ésta es la velocidad del protón incidente en el marco del laboratorio. Su energía total puede obtenerse de la ecuación 29:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1 - (4\sqrt{3}/7)^2}} = 7m_pc^2,$$

y el umbral de la energía cinética es

$$K = E - m_pc^2 = 6m_pc^2 = 6(938 \text{ MeV})$$
$$= 5628 \text{ MeV} = 5.628 \text{ GeV}.$$

El acelerador Bevatron de Berkeley fue diseñado pensando en este experimento, con el fin de que pudiera producir un haz de protones cuya energía superara los 5.6 GeV. El descubrimiento del antiprotón en esta reacción fue galardonado con el premio Nobel de 1959 a los científicos, Emilio Segrè y Owen Chamberlain.

21-10 LA LÓGICA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Hemos llegado a un punto en que podemos dirigir una mirada retrospectiva a nuestra presentación de la relatividad especial y pensar acerca de su lógica natural. En primer lugar, debemos advertir que la relatividad afecta a cada aspecto de la física; nos hemos concentrado en este capítulo en la mecánica, y más adelante en este texto consideraremos el efecto de la relatividad en el electromagnetismo. En efecto, debemos reexaminar cuidadosamente cada subcampo de la física desde la perspectiva de la relatividad especial, verificando que cada uno de ellos sea consistente con los dos postulados. Debemos observar también que la relatividad ha pasado todas las pruebas experimentales sin la menor discrepancia. Es una teoría de gran valor estético, que nos proporciona una visión más satisfactoria que la de la física clásica acerca de la validez de perspectivas y simetrías diferentes. Es también una teoría de gran valor práctico, que les suministra a los ingenieros una guía apropiada para construir grandes aceleradores de partículas, así como también a los implicados en el mantenimiento de las normas con los procedimientos adecuados para corregir las lecturas de los relojes atómicos cuando se les transporta de una localidad a otra.

El primer postulado de la relatividad es realmente una extensión de la primera ley de Newton, la ley de la inercia, la cual definió el concepto de los marcos inerciales y nos proporcionó la primera noción de que los observadores inerciales obtendrían conclusiones idénticas de la observación de un experimento en el cual no actúe ninguna fuerza neta. No vamos demasiado lejos si extendemos esa visión para afirmar que los observadores inerciales deberían también extraer conclusiones idénticas de la observación de un experimento en el que *hay* una fuerza neta. Por último, ¿por qué deberíamos seleccionar las leyes de la mecánica para esta equivalencia? Al extenderla a una equivalencia para observadores inerciales de *todas* las leyes de la física, llegamos al primer postulado.

El segundo postulado es también razonable. Parece increíble que seamos capaces de transmitir una señal a una velocidad infinita, teniéndose así una comunicación instantánea a todo el universo. Además, los experimentos sobre la relatividad del tiempo demuestran que tal comunicación instantánea entre puntos distantes no es consistente con la observación. Si existe una velocidad límite, entonces con seguridad (según el primer postulado) debe ser la misma para todos los observadores, sin importar su estado de movimiento.

Para algunos, la primera exposición de la relatividad de la simultaneidad, el aparente encogimiento de las barras en movimiento, y la dilatación del tiempo puede ser inquietante. Sin embargo, un poco de reflexión nos persuadirá de que las alternativas clásicas son más inquietantes aún. Por ejemplo, una barra rígida clásica de longitud definida no es un concepto que resulta consistente con la relatividad; una señal (digamos, un movimiento rápido) en un extremo no puede transmitirse instantáneamente al otro extremo. Debemos renunciar a la idea de que todos los observadores sean capaces de usar la *misma* vara de medir. Reemplazamos esta idea con otra que dé a cada observador una vara de medir y que permita que cada observador use esa vara para hacer mediciones dentro de un marco de referencia en particular. Ningún instrumento de medición de un observador, o sus resultados, se prefiere sobre cualquier otro. Por último, la relatividad nos proporciona una simetría maravillosa entre estos observadores; no afirma la *realidad* del atraso de los relojes, sino que, a partir de sus dos perspectivas diferentes, dos observadores en movimiento relativo observan cada uno que el reloj del otro se atrasa. No hay necesidad ninguna de garantizar un status de preferencia para cualquiera de ellos, o para cualquier otro observador inercial.

De acuerdo con la física clásica, el espacio y el tiempo son absolutos. Esto implica que las leyes de la física deben ser diferentes para observadores diferentes. En cambio, la relatividad nos dice que las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores, y en consecuencia el espacio y el tiempo se convierten en conceptos relativos. Resulta claro que la relatividad es "más absoluta" que la física clásica. El mundo físico arbitrario y complejo de la física clásica, en el que cada observador debe usar un conjunto diferente de leyes físicas, se convierte en el mundo físico, más uniforme y sencillo de la relatividad.

La relatividad amplía nuestra visión del Universo al situarnos entre los muchos observadores inerciales de ese universo. Trae consigo conceptos que, de acuerdo con la física clásica, se trataban por separado: por ejemplo, el espacio y el tiempo se transformaron en espacio-tiempo, o la masa y la energía se transformaron en energía en reposo. Señala el camino hacia una sola teoría unificada que incluye todas las interacciones posibles entre las partículas: la electricidad y el magnetismo se convierten en el electromagnetismo; el electromagnetismo y las llamadas fuerzas débiles (las responsables de ciertos procesos de desintegración radioactiva) se convierten en la interacción electrodébil; las interacciones electrodébil y nuclear fuerte se convierten en una de las propuestas Teorías de la Gran Unificación (TGU) (o GUT,de Grand Unified Theories); y por último, las TGU y la gravedad se convierten en la hipotética Teoría del Todo. Con seguridad que Einstein, quien sólo conoció la primera de estas unificaciones, estaría realmente complacido con estos desarrollos.

PREGUNTAS

1. La velocidad de la luz en el vacío es una verdadera constante de la naturaleza, independiente de la longitud de onda de la luz o de la elección de un marco de referencia (inercial). ¿Existe entonces alguna manera de que el segundo postulado de Einstein pueda verse como contenido dentro del ámbito de su primer postulado?
2. Discuta el problema que intentó resolver el joven Einstein; es decir, ¿cuál sería la apariencia de una onda electromagnética para una persona que corriese junto a ella con una velocidad c?
3. ¿Es válido en la relatividad el concepto de un fluido incompresible? ¿Y qué decir de los cuerpos perfectamente rígidos?
4. Un quasar (*objeto casi estelar*) se aleja de la Tierra a la mitad de la velocidad de la luz. ¿Cuál es la velocidad, con respecto a la Tierra, de la luz que detectamos viniendo de él?
5. Los quásares son los objetos más intrínsecamente luminosos del universo. Muchos de ellos fluctúan en brillo, a menudo en una escala de tiempo de un día más o menos. ¿Cómo puede emplearse la rapidez de estos cambios en el brillo para calcular un límite superior del tamaño de estos objetos? (*Sugerencia:* Los puntos separados no pueden cambiar de una manera coordinada a no ser que sea enviada información de uno al otro.)
6. La tasa de barrido de la cauda de un cometa puede superar a la velocidad de la luz. Explique este fenómeno y demuestre que no existe una contradicción con la relatividad.
7. Considere un frente de onda de luz esférico que se difunde desde una fuente puntual. Visto por un observador en la fuente, ¿cuál es la *diferencia de velocidad* de las partes del frente de onda que viajan en direcciones opuestas? ¿Cuál es la *velocidad relativa* de una de estas porciones del frente de onda con respecto a la otra?
8. Tomando prestadas dos frases de Herman Bondi, podemos captar la esencia de los dos postulados de Einstein titulándolos: (1) el principio de "la inaplicabilidad de la velocidad" y (2) el principio de "la unicidad de la luz". ¿En qué sentido es inaplicable la velocidad y única la luz en estas dos aseveraciones?

9. Un rayo de láser incide en ángulo recto sobre un espejo plano y se refleja en él. ¿Cuál es la velocidad del rayo reflejado si el espejo está (*a*) fijo en el laboratorio y (*b*) moviéndose directamente hacia el láser con velocidad v?
10. Dé un ejemplo de la física clásica en el que el movimiento de un reloj afecta su pulsación, esto es, la manera en que marcha. (La magnitud del efecto puede depender de la naturaleza detallada del reloj.)
11. Si bien en la relatividad (donde el movimiento es relativo y no absoluto) encontramos que "los relojes en movimiento se atrasan", este efecto no tiene nada que ver con que el movimiento altere la manera en que trabaja un reloj. ¿Con qué tiene que ver?
12. Hemos visto que si varios observadores registran dos sucesos, titulados *A* y *B*, uno de ellos puede decir que el suceso *A* ocurrió primero, pero el otro puede decir que fue el suceso *B* que sucedió primero. ¿Qué le diría usted a un amigo que le preguntase qué suceso *ocurrió realmente* primero?
13. Dos sucesos ocurren en el mismo lugar y al mismo tiempo para un observador. ¿Serían los sucesos simultáneos para todo observador? ¿Ocurrirían en el mismo lugar para todo observador?
14. Dos sucesos son simultáneos pero separados en el espacio en un marco de referencia inercial. ¿Serían simultáneos en cualquier otro marco? ¿Sería su separación espacial la misma en cualquier otro marco?
15. Hagamos que el suceso *A* sea la salida de un aeroplano desde San Francisco y que el evento *B* sea su llegada a Nueva York. ¿Es posible hallar dos observadores que discrepen respecto al orden en el tiempo de estos sucesos? Explique.
16. Dos observadores, uno en reposo en *S* y el otro en reposo en *S'*, llevan cada uno una vara de medir orientada paralelamente a su movimiento relativo. *Cada* observador halla después de medir que la vara de medir *del otro* observador es la más corta de las dos. ¿Le parece esto una paradoja? Explique (*Sugerencia*: Compare con la situación siguiente. Harry le dice adiós a Walter quien está en la parte trasera de una vagoneta que se aleja de Harry. Harry dice que Walter se vuelve más pequeño. Walter dice que Harry se vuelve más pequeño. ¿Están midiendo la misma cosa?
17. ¿Cómo interviene el concepto de simultaneidad en la medición de la longitud de un objeto?
18. En la relatividad las coordenadas de tiempo y espacio están entrelazadas y tratadas sobre una base más o menos equivalente. ¿Son el tiempo y el espacio fundamentalmente de la misma naturaleza, o existe alguna diferencia esencial entre ellos que sea preservada aun en la relatividad?
19. En la "paradoja de los gemelos", explique (en términos de latidos del corazón, actividades físicas y mentales, y así sucesivamente) por qué el gemelo que regresa más joven no ha vivido más tiempo que su tiempo propio, aun cuando el hermano que se quedó en casa pueda decir que sí lo hizo. ¿Explique por tanto la frase: "Envejeces de acuerdo con tu tiempo propio".
20. ¿Podemos sustituir simplemente a γm por m en las ecuaciones clásicas para obtener las ecuaciones relativistas correctas? Dé ejemplos.
21. Si las partículas con masa cero tienen una velocidad c en un marco de referencia, ¿pueden encontrarse en reposo en cualquier otro marco? ¿Pueden tales partículas tener cualquier velocidad diferente de c?
22. Un partícula con masa cero (un neutrino, posiblemente) puede transportar ímpetu. Pero, según la ecuación 23, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, el ímpetu es directamente proporcional a la masa y, por lo tanto, debería ser cero cuando la masa es cero. Explique.
23. ¿En cuántas expresiones relativistas puede usted pensar en los que el factor Lorentz γ intervenga como un simple multiplicador?
24. ¿Es la masa de una partícula estable, compuesta (un núcleo de oro, por ejemplo) más grande que, igual a, o menor que la suma de las masas de sus componentes? Explique.
25. "La masa del electrón es de 0.511 MeV". ¿Qué significa exactamente esta afirmación?
26. "La relación $E_0 = mc^2$ es esencial en la operación de una planta de potencia basada en la fisión nuclear, pero tiene únicamente una importancia despreciable en una planta de combustible fósil". ¿Es ésta una afirmación verdadera? Explique por qué o por qué no.
27. Una planta hidroeléctrica genera electricidad porque el agua cae bajo la acción de la gravedad a través de una turbina, haciendo girar por tanto a la flecha de un generador. De acuerdo con el concepto de masa-energía, ¿debe ser identificada la generación de energía (la electricidad) con una disminución de masa en alguna parte? De ser así, ¿dónde?
28. Algunos dicen que la relatividad complica las cosas. Dé ejemplos de lo contrario, o sea, donde la relatividad las simplifique.

PROBLEMAS

Sección 21-3 Consecuencias de los postulados de Einstein

1. Independientemente de los efectos debidos a los movimientos rotatorio y orbital de la Tierra, un marco de laboratorio no es estrictamente un marco inercial porque una partícula situada en reposo allí no permanece, en general, en reposo; caería debido a la gravedad. Sin embargo, a menudo los sucesos acontecen tan rápidamente que podemos ignorar la caída libre y tratar al marco como inercial. Considérese, por ejemplo, un electrón de 1.0 MeV (para el cual $v = 0.941c$) lanzado horizontalmente hacia una cámara de pruebas del laboratorio y moviéndose una distancia de 20 cm. (*a*) ¿Cuánto tiempo tomaría?, y (*b*) ¿cuánto caería el electrón durante este intervalo? ¿Qué podemos concluir respecto a la idoneidad del laboratorio como un marco inercial en este caso?
2. Un electrón de 100 MeV, para el cual $v = 0.999987c$, se mueve a lo largo del eje de un tubo al vacío que tiene una longitud de 2.86 m medido por un observador *S* en el laboratorio respecto al cual el tubo está en reposo. Un observador *S'* que se mueva con el electrón, sin embargo, vería que este tubo pasa moviéndose con una velocidad v. ¿Qué longitud del tubo mediría este observador?
3. Una barra que está paralela al eje x del marco de referencia *S*, se mueve a lo largo de este eje con una velocidad de $0.632c$. Su longitud en reposo es 1.68 m. ¿Cuál será su longitud medida en el marco *S*?
4. La vida media de los muones frenados por un bloque de plomo en el laboratorio es de 2.20 μs. La vida media de muones de alta velocidad en una ráfaga de rayos cósmicos observado desde la Tierra es de 16 μs. Halle la velocidad de estos muones en los rayos cósmicos.
5. Una partícula inestable de alta energía entra a un detector y deja un rastro de 1.05 mm de longitud antes de desintegrarse. Su velocidad con relación al detector era $0.992c$. ¿Cuál es su vida media propia? Es decir, ¿cuánto tiempo duraría antes de desintegrarse habiendo estado en reposo con respecto al detector?
6. Se mide que la longitud de un vehículo espacial es exactamente la mitad de su longitud en reposo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del vehículo con relación al marco del observador? (*b*) ¿Por qué factor se atrasan los relojes del vehículo, comparados con los relojes en el marco del observador?
7. Una partícula se mueve a lo largo del eje x' del marco *S'* con una velocidad de $0.413c$. El marco *S'* se mueve con una velocidad de $0.587c$ con respecto al marco *S*. ¿Cuál es la velocidad de la partícula medida en el marco *S*?
8. El marco *S'* se mueve con relación al marco *S* a $0.620c$ en la dirección de la x creciente. En el marco *S'* se mide que una partícula tiene una velocidad de $0.470c$ en la dirección de x' creciente. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula con respecto al marco *S*? (*b*) ¿Cuál sería la velocidad de la partícula con respecto a *S* si se movió (a $0.470c$) en dirección de la x' *decreciente* en el marco *S'*? En cada caso, comparar las respuestas con las predicciones de la ecuación clásica de la transformación de velocidades.
9. Un vehículo espacial de 130 m de longitud en reposo pasa por una estación cronometradora con una velocidad de $0.740c$. (*a*) ¿Cuál es la longitud del vehículo medida por la estación? (*b*) ¿Qué intervalo de tiempo registrará la estación entre el paso de los extremos frontal y trasero de la nave?
10. En los estratos altos de la atmósfera de la Tierra se crea un pión al chocar una partícula incidente de rayos cósmicos de alta energía con un núcleo atómico. El pión así formado desciende hacia la Tierra con una velocidad de $0.99c$. En un marco de referencia en el cual estén en reposo, los piones tienen una vida media 26 ns. Medido en un marco fijo respecto a la Tierra, ¿a qué distancia se moverá este pión típico a través de la atmósfera antes de desintegrarse?
11. Un satélite debe tener una velocidad de unos 7.91 km/s para rodear a la Tierra en una órbita baja. Supongamos que dos de tales satélites giran en torno a la Tierra en direcciones opuestas. (*a*) ¿Cuál es su velocidad relativa al encontrarse? Evalúe usando la ecuación clásica de Galileo para la transformación de velocidades. (*b*) ¿Qué error fraccionario se cometió a causa de no haber usado la ecuación relativista (correcta) de la transformación?

Sección 21-4 La transformación de Lorentz

12. ¿Cuál debe ser el valor del parámetro β de la velocidad si el factor γ de Lorentz es de (*a*) ¿1.01? (*b*) ¿10.0? (*c*) ¿100? (*d*) ¿1000?
13. Halle el parámetro de la velocidad de una partícula a la que le toma dos años más que a la luz viajar una distancia de 6.0 años luz.
14. El observador *S* asigna a un suceso las coordenadas $x = 100$ km, $t = 200$ μs. Halle las coordenadas de este suceso en el marco *S'*, el cual se mueve en la dirección de la x creciente con una velocidad de $0.950c$. Suponga que $x = x'$ en $t = t' = 0$.
15. El observador *S* reporta que ocurrió un evento en el eje x en $x = 3.20 \times 10^8$ m al tiempo $t = 2.50$ s. (*a*) El observador *S'* se mueve en dirección de x creciente con una velocidad de $0.380c$. ¿Qué coordenadas reportaría *S'* para el suceso? (*b*) ¿Qué coordenadas reportaría *S''* si *S''* se estuviera moviendo en la dirección de x *decreciente* con la misma velocidad?
16. El marco inercial *S'* se mueve con una velocidad de $0.60c$ con respecto al marco *S* en la dirección de x creciente. En el marco *S*, el evento 1 ocurre en el origen en $t = 0$, y el evento 2 ocurre sobre el eje x en $x = 3.0$ km y en $t = 4.0$ μs. ¿Qué tiempos de ocurrencia registra el observador *S'* para estos mismos sucesos? Explique la inversión del orden en el tiempo.
17. Un experimentador dispara dos bulbos de destellos simultáneamente, un destello azul situado en el origen de su marco de referencia y un destello rojo en $x = 30.4$ km. Un segundo observador, que se mueve con una velocidad de $0.247c$ en la dirección de x creciente, ve también los destellos. (*a*) ¿Qué intervalo de tiempo entre ellos encuentra el segundo observador? (*b*) ¿Cuál destello ocurre primero para este observador?
18. Derive las ecuaciones 17 para la transformación inversa de Lorentz invirtiendo algebraicamente las ecuaciones de la transformación de Lorentz, ecuaciones 14.

Sección 21-6 La transformación de las velocidades

19. Supóngase que el observador *S* dispare un haz de luz en la dirección y ($v_x = 0$, $v_y = c$). El observador *S'* se está moviendo con una velocidad u en la dirección x. (*a*) Halle las componentes v_x' y v_y' de la velocidad del haz de luz de

acuerdo con S', y (*b*) demuestre que S' mide una velocidad de c para el haz de luz.

20. Un protón de rayos cósmicos se acerca a la Tierra a lo largo de su eje con una velocidad de $0.787c$ hacia el Polo Norte y otro, con velocidad $0.612c$, hacia el Polo Sur. Véase la figura 23. Halle la velocidad de acercamiento relativa de una partícula respecto a la otra. (*Sugerencia:* Es de utilidad considerar a la Tierra y a una de las partículas como los dos marcos inerciales de referencia.)

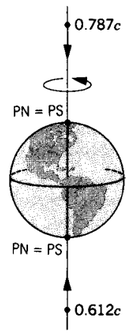


Figura 23 Problema 20.

21. Se reporta que la galaxia A está retrocediendo con respecto a nosotros con una velocidad de $0.347c$. La galaxia B, situada precisamente en la dirección opuesta, está también retrocediendo con respecto a nosotros con la misma velocidad. ¿Qué velocidad de retroceso hallaría un observador en la galaxia A (*a*) para nuestra galaxia y (*b*) para la galaxia B?

22. Por las mediciones del corrimiento al rojo de la luz emitida se concluye que el quasar Q_1 se aleja de nosotros con una velocidad de $0.788c$. El quasar Q_2, que está en la misma dirección en el espacio pero más cerca de nosotros, se aleja de nosotros con una velocidad de $0.413c$. ¿Qué velocidad de Q_2 mediría un observador situado en Q_1?

23. A un vehículo espacial, en reposo en cierto marco de referencia S, se le da un incremento de velocidad de $0.500c$. Luego recibe un incremento adicional de $0.500c$ en este nuevo marco, y este proceso continúa hasta que su velocidad respecto a su marco original S sea de $0.999c$. ¿Cuántos incrementos se requieren?

24. Un núcleo radiactivo se mueve con una velocidad constante de $0.240c$ a lo largo del eje x de un marco de referencia S fijo respecto al laboratorio. Se desintegra emitiendo un electrón cuya velocidad, medida en un marco de referencia S' que se mueve con el núcleo, es de $0.780c$. Considérense primero los casos en que el electrón emitido viaje (*a*) a lo largo del eje xx' común y (*b*) a lo largo del eje y' y halle, para cada caso, su velocidad (magnitud y dirección) medida en el marco S. (*c*) Sin embargo, supóngase que el electrón emitido, visto ahora desde el marco S, viaje a lo largo del eje y de ese marco con una velocidad de $0.780c$. ¿Cuál es su velocidad (magnitud y dirección) medida en el marco S'?

25. En la figura 24, A y B son trenes sobre vías perpendiculares, que parten de la estación S. Las velocidades se refieren al marco de la estación (marco S). (*a*) Halle $\mathbf{v}_{AB}$, la velocidad del tren B con respecto al tren A. (*b*) Halle $\mathbf{v}_{BA}$, la velocidad del tren A con respecto al tren B.Comente el hecho de que estas dos velocidades relativas no apuntan en direcciones opuestas.

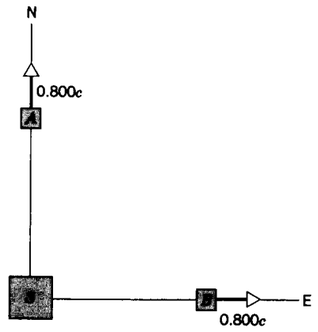


Figura 24 Problema 25.

Sección 21-7 Consecuencias de la transformación de Lorentz

26. Un electrón se mueve con una velocidad tal que podría rodear a la Tierra por el ecuador en 1 s. (*a*) ¿Cuál es su velocidad, en términos de la velocidad de la luz? (*b*) ¿Sin energía cinética K? (*c*) ¿Qué porcentaje de error cometemos al usar la fórmula clásica para calcular K?

27. El radio en reposo de la Tierra es de 6370 km y su velocidad orbital respecto al Sol es de 29.8 km/s. ¿En cuánto parecería acortarse el diámetro de la Tierra para un observador estacionarios de modo que pueda ver pasar a la Tierra con esta velocidad?

28. Un aeroplano cuya longitud en reposo es de 42.4 m se mueve respecto a la Tierra con una velocidad constante de 522 m/s. (*a*) ¿En qué fracción de su longitud en reposo le parecería haberse acortado a un observador situado en la Tierra? (*b*) ¿Cuánto tiempo tomaría según los relojes de la Tierra para que el reloj del aeroplano se atrase 1 μs? (Suponga que se aplica únicamente la relatividad especial).

29. Un vehículo espacial cuya longitud en reposo es de 358 m tiene una velocidad de $0.728c$ respecto a un cierto marco de referencia. Un micrometeorito, con una velocidad de $0.817c$ en este marco, encuentra al vehículo espacial en una trayectoria antiparalela. ¿Cuánto tiempo le toma a este micrometeorito pasar al vehículo espacial?

30. Un reloj se mueve a lo largo del eje x con una velocidad de $0.622c$ e indica cero al pasar por el origen. (*a*) Calcule el factor de Lorentz. (*b*) ¿Qué tiempo indica el reloj cuando pase por $x = 183$ m?

31. Un observador S ve un destello de luz roja a 1210 m y un destello de luz azul a 730 m sobre la misma línea recta. S mide que el intervalo de tiempo entre el disparo de los destellos es de 4.96 μs, ocurriendo primero el destello rojo. (*a*) Halle la velocidad relativa (magnitud y dirección) de un segundo observador S' que registre que estos destellos ocurren en el mismo lugar. (*b*) Según el punto de vista de S', ¿cuál destello ocurre primero y cuál es el intervalo de tiempo medido entre destellos?

32. Considere el problema anterior. Suponga ahora que el observador S vea los dos destellos en las mismas posiciones que en ese problema pero ocurriendo más cerca entre sí en cuanto a tiempo. ¿A qué distancia en tiempo pueden estar entre sí y todavía tener la posibilidad de hallar un marco S' en el que ocurran en el mismo lugar?

33. Un viajero del espacio despega de la Tierra y se mueve con una velocidad de $0.988c$ hacia la estrella Vega, que está a una distancia de 26.0 años luz. ¿Cuánto tiempo habrá pasado en los relojes de la Tierra (*a*) cuando el viajero llegue a Vega y (*b*) cuando los observadores en la Tierra reciban su aviso de haber llegado? (*c*) ¿Qué tanto más viejo calcularán los observadores en la Tierra que sea el viajero al llegar a Vega de lo que era cuando inició el viaje?

34. Usted desea hacer un viaje redondo desde la Tierra en un vehículo espacial, viajando con una velocidad constante en línea recta durante 6 meses y regresando luego con la misma velocidad constante. Además, usted desea, a su retorno, hallar a la Tierra como si estuviese a 1000 años en el futuro. (*a*) ¿Qué tan rápidamente tendría que viajar? (*b*) ¿Importa o no que el viaje haya sido en línea recta? Si, por ejemplo, usted viajase en un círculo durante 1 año, ¿hallaría aún al retornar que habían transcurrido 1000 años en los relojes de la Tierra?

35. Los observadores S y S' están en el origen de sus marcos respectivos, los cuales se mueven uno con relación al otro con una velocidad de $0.600c$. Cada uno tiene un reloj ordinario, el cual, como es lo usual, ponen a cero cuando coincidan los dos orígenes. El observador S mantiene visualmente al reloj S' a la vista. (*a*) ¿Qué tiempo registrará el reloj S' cuando el reloj S registre 5.00 us? (*b*) ¿Qué tiempo *leerá realmente* el observador S en el reloj S' cuando el reloj S indique 5.00 μs?

36. (*a*) Puede una persona, en principio, viajar desde la Tierra hasta el centro galáctico (que está a alrededor de 23,000 años luz de distancia) en un ciclo de vida normal? Explique, usando los argumentos ya sea de dilatación del tiempo o de contracción de la longitud. (*b*) ¿Qué velocidad constante necesitaría esa persona para efectuar el viaje en 30 años (tiempo propio)?

Sección 21-8 Ímpetu relativista

37. Demuestre que $1 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 1.875 \times 10^{21} \text{ MeV}/c$

38. Una partícula tiene un ímpetu igual a mc. Calcule su velocidad.

39. Calcule el parámetro de velocidad de una partícula con un ímpetu de 12.5 MeV/c si la partícula es (*a*) un electrón y (*b*) un protón.

Sección 21-9 Energía relativista

40. Halle el parámetro β de la velocidad y el factor γ de Lorentz para un electrón cuya energía cinética es (*a*) 1.0 keV, (*b*) 1.0 MeV, y (*c*) 1.0 GeV.

41. Halle el parámetro β de la velocidad y el factor de Lorentz para una partícula cuya energía cinética es 10 MeV si la partícula es (*a*) un electrón, (*b*) un protón, y (*c*) una partícula alfa.

42. Una partícula tiene una velocidad de $0.990c$ en el marco de referencia de un laboratorio. ¿Cuáles son su energía cinética, su energía total, y su ímpetu si la partícula es (*a*) un protón o (*b*) un electrón?

43. Se cree que los quásares son los núcleos de galaxias activas en las etapas iniciales de su formación. Un quasar típico irradia energía a razón de 1.20×10^{41} W. ¿En qué razón se está reduciendo la masa de este quasar para suministrar esta energía? Exprese su respuesta en unidades de masa solar por año, en donde una unidad de masa solar (ums) es la masa de nuestro Sol.

44. Calcule la velocidad de una partícula (*a*) cuya energía cinética sea igual al doble de su energía en reposo y (*b*) cuya energía total sea igual al doble de su energía en reposo.

45. Halle el ímpetu de una partícula de masa m para que su energía total sea tres veces su energía en reposo.

46. Use las velocidades dadas en la figura 19 en el marco S' y demuestre que, de acuerdo con S', las energías cinéticas antes y después de la colisión, calculadas clásicamente, están dadas por las ecuaciones 26.

47. Reconsidere la colisión mostrada en la figura 19. Usando la ecuación 27 de la energía cinética relativista, calcule las energías cinéticas inicial y final en el marco S' y a partir de allí demuestre que la energía cinética se conserva en este marco así como en el marco S.

48. Considere lo siguiente, moviéndose todo en el espacio libre: un fotón de 2.0 eV, un electrón de 0.40 MeV, y un protón de 10 MeV. (*a*) ¿Cuál se está moviendo más rápidamente? (*b*) ¿Cuál más lentamente? (*c*) ¿Cuál tiene el ímpetu más grande? (*d*) ¿Cuál el momento más pequeño? (*Nota:* Un fotón es una partícula de luz de masa cero.)

49. (*a*) Si la energía cinética K y el ímpetu p de una partícula pueden medirse, sería posible hallar su masa m y por lo tanto identificar a la partícula. Demuestre que

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}.$$

(*b*) ¿A qué se reduce esta expresión cuando $v/c \to 0$, en donde v es la velocidad de la partícula? (*c*) Halle la masa de una partícula cuya energía cinética es de 55.0 MeV y cuyo ímpetu es de 121 MeV/c; expresar su respuesta en términos de la masa m_e del electrón.

50. En una colisión de alta energía de una partícula primaria de rayos cósmicos cerca de la parte superior de la atmósfera de la Tierra, a 120 km sobre el nivel del mar, se crea

un pión con una energía total de 135 GeV, que viaja verticalmente hacia abajo. En su marco propio este pión se desintegra 35.0 ns después de su creación. ¿A qué altitud sobre el nivel del mar ocurre la desintegración? La energía en reposo de un pión es de 139.6 MeV.

51. ¿Cuánto trabajo es necesario efectuar para aumentar la velocidad de un electrón desde (*a*) $0.18c$ hasta $0.19c$ y (*b*) $0.98c$ hasta $0.99c$? Nótese que el aumento de velocidad ($= 0.01c$) es el mismo en cada caso.

52. Dos partículas idénticas, de 1.30 mg de masa cada una, que se mueven con velocidades de $0.580c$, iguales pero opuestas, en el marco de referencia del laboratorio, chocan y se quedan pegadas. Halle la masa de la partícula resultante.

53. Una partícula de masa m que viaja con una velocidad relativista choca en una colisión completamente inelástica con una partícula idéntica que inicialmente está en reposo. Halle (*a*) la velocidad de la partícula única resultante y (*b*) su masa. Exprese sus respuestas en términos del factor de Lorentz γ de la partícula incidente.

54. (*a*) Suponga que tenemos a una partícula acelerada desde el reposo por la acción de una fuerza F. Suponiendo que la segunda ley de Newton para una partícula, $F = dp/dt$, sea válida en la relatividad, demuestre que la energía cinética final K puede escribirse, usando el teorema trabajo-energía, como $K = \int v\, dp$. (*b*) Usando la ecuación 23 del ímpetu relativista, demuestre que llevando a cabo la integración en (*a*) obtenemos la ecuación 27 de la energía cinética relativista.

55. (*a*) En la física moderna experimental de alta energía, se hace que partículas energéticas circulen en direcciones opuestas en anillos llamados de almacenamiento y se permite que choquen de frente. En esta situación cada partícula tiene la misma energía cinética K en el laboratorio. Las colisiones pueden considerarse totalmente inelásticas, en que la energía en reposo de las dos partículas que chocan, más toda la energía cinética disponible, puede ser usada para generar nuevas partículas y dotarlas de energía cinética. Demuestre que la energía disponible en esta situación puede escribirse en la forma

$$E_{\text{nueva}} = 2mc^2\left(1 + \frac{K}{mc^2}\right)$$

donde m es la masa de las partículas que chocan. (*b*) ¿De cuánta energía se puede disponer cuando se emplean de esta manera protones de 100 GeV? (*c*) ¿Qué energía se requerirá de los protones para disponer de 100 GeV? (*Nota*: Compare sus respuestas con las del problema 56, que describe otra situación de bombardeo, aunque menos eficaz en cuanto a la energía.)

56. (*a*) Un protón, de masa m, acelerado en un sincrotrón de protones a una energía cinética K choca con un segundo protón (el blanco) en reposo en el laboratorio. La colisión es enteramente inelástica y en ella está disponible la energía de reposo de los dos protones, más toda la energía cinética consistente con la ley de la conservación del ímpetu, para generar nuevas partículas y dotarlas de energía cinética. Demuestre que la energía disponible para este propósito está dada por

$$E_{\text{nueva}} = 2mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{K}{2mc^2}\right)}.$$

(*b*) ¿De cuánta energía se dispone cuando se usan de este modo protones de 100 GeV? (*c*) ¿Qué energía se requerirá de los protones para disponer de 100 GeV? (*Nota*: Compárese con el problema 55).

57. (*a*) Considere la desintegración del kaón descrito en el problema muestra 8, pero use un marco de referencia (el marco del centro de masa) en el que los kaones estén inicialmente en reposo. Demuestre que los dos piones emitidos en la desintegración viajan en direcciones opuestas con velocidades iguales de $0.827c$. (*b*) ¿Cuál es la velocidad de los kaones originales observados en el marco del laboratorio? (*c*) Suponga que los dos piones son emitidos en el marco del centro de masa con velocidades de $v_x' = +0.827c$ y $v_x' = -0.827c$. Calculando las velocidades correspondientes en el marco del laboratorio, demuestre que las energías cinéticas en el marco del laboratorio son idénticas a las halladas en la solución del problema muestra 8.

58. Una partícula alfa con una energía cinética de 7.70 MeV choca con un núcleo de ^{14}N en reposo. Se producen un núcleo de ^{17}O y un protón, el protón emitido a 90° con la dirección de la partícula alfa incidente y transportando una energía cinética de 4.44 MeV. Las energías en reposo de las diversas partículas son: partícula alfa, 3730.4 MeV; ^{14}N, 13,051 MeV; protón, 939.29 MeV; ^{17}O, 15,843 MeV. (*a*) Halle la energía cinética del núcleo de ^{17}O. (*b*) ¿Con qué ángulo respecto a la dirección de la partícula alfa incidente se mueve el núcleo de ^{17}O?

CAPÍTULO 22

TEMPERATURA

Hasta aquí hemos tratado, en su momento, la mecánica de las partículas aisladas, los sistemas de partículas, los cuerpos rígidos, y los fluidos. En cada caso, hemos utilizado de una forma u otra las leyes de Newton para analizar la dinámica del sistema y estudiar a la vez los movimientos de la partícula por separado o los movimientos de los elementos del sistema.

A partir de este capítulo, ampliamos ahora nuestra perspectiva para tratar con sistemas que resultan demasiado complejos como para tratarlos en términos del movimiento de la partícula por separado. Estos sistemas aparecen por lo general desordenados debido al gran número de partículas implicadas y a las muy diferentes maneras en que pueden compartir la energía del sistema. Para analizar estos sistemas hacemos uso de los principios de la termodinámica. *En nuestro estudio de la termodinámica definiremos un nuevo conjunto de variables físicas para describir el estado de un sistema, y deduciremos un nuevo conjunto de leyes que rigen el comportamiento de los sistemas. También demostraremos cómo pueden entenderse estas nuevas leyes sobre la base de nuestras leyes previas de la mecánica.*

Un concepto central de la termodinámica es la temperatura. *En este capítulo damos la definición de la temperatura y exponemos la forma de medirla.*

22-1 DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA Y DESCRIPCIÓN MICROSCÓPICA

Un litro de gas contiene unas 3×10^{22} moléculas. Tomemos el caso más sencillo posible y tratemos a las moléculas del gas como partículas puntuales que chocan elásticamente entre sí y con las paredes del recipiente que las contiene. Si especificamos la posición y la velocidad iniciales de cada partícula, podemos entonces aplicar las leyes de Newton y deducir la posición y la velocidad de cada partícula en cualquier momento futuro. Dada esa información, podemos calcular ciertas propiedades mensurables del sistema, tales como la fuerza impulsiva neta ejercida sobre un elemento de área del recipiente. Llamamos a esto la descripción *microscópica* del sistema. Puesto que el número de partículas es tan grande, nos resulta ventajoso tratar al sistema usando valores promedio de las cantidades microscópicas. Este enfoque se llama *mecánica estadística* y se discute en el capítulo 24.

Un enfoque distinto se basa en la pregunta siguiente: ¿Podemos describir al sistema, incluyendo sus interacciones mutuas con su entorno, en términos de un número pequeño de propiedades del conjunto que sean mensurables por medio de operaciones relativamente sencillas llevadas a cabo en el laboratorio? En el caso de un gas confinado en un recipiente, podemos realmente obtener tal descripción en términos de las cantidades *macroscópicas*, como presión, volumen, temperatura, cantidad de materia, y energía interna, entre otras. En sistemas diferentes a un gas, podemos definir y medir diferentes variables macroscópicas. Por ejemplo, en un material ferromagnético como el hierro, las partículas no interactúan por fuerzas impulsoras en las colisiones sino por fuerzas magnéticas; en la descripción macroscópica de un material ferromagnético, la magnetización debe ser incluida entre las cantidades macroscópicas.

Usualmente las propiedades macroscópicas pueden medirse directamente en el laboratorio, por ejemplo, la presión de un gas confinado o la magnetización de un trozo de hierro. Podemos también medir fácilmente la variación de cualquiera de tales propiedades con la temperatura y derivar una *ecuación de estado* que describa la dependencia de las variables macroscópicas entre sí.

En cualquier sistema, las cantidades macroscópica y las microscópicas deben relacionarse porque son modos sim-

plemente diferentes de describir la misma situación. En particular, deberíamos ser capaces de expresarla una en términos de la otra. La presión de un gas, una cantidad macroscópica, se mide operativamente usando un manómetro. Microscópicamente, la presión se relaciona con la cantidad promedio por unidad de área en que las moléculas del gas liberan ímpetu al fluido del manómetro al chocar con su superficie. En la sección 23-3 cuantificamos esta definición microscópica de la presión. De igual forma (véase la sección 23-4), la temperatura de un gas (cantidad macroscópica también) se relaciona con la energía cinética promedio de traslación de las moléculas.

Si las cantidades macroscópicas pueden expresarse en términos de las cantidades microscópicas, entonces las leyes de la termodinámica pueden expresarse cuantitativamente en términos de la mecánica estadística. Esta posibilidad es uno de los logros en el desarrollo de la física. Este tema de la relación entre las variables macroscópicas y microscópicas surgirá con frecuencia según avancemos en el estudio de la termodinámica.

22-2 TEMPERATURA Y EQUILIBRIO TÉRMICO

Consideremos los dos sistemas A y B ilustrados en la figura 1*a*. Están "aislados" uno del otro y del entorno. Por "aislados" queremos decir que ni la energía ni la materia pueden entrar o salir de cualquiera de los sistemas. Por ejemplo, los sistemas podrían estar rodeados por paredes hechas de placas gruesas de espuma de poliestireno (styrofoam), las que supuestamente son tanto rígidas como impermeables. En este caso se dice que las paredes son *adiabáticas*. (El término "adiabático" proviene del griego y quiere decir "que no puede ser atravesado". Así, "adiabático" puede entenderse como "aislante".) Los cambios en las propiedades de un sistema no tienen efecto sobre el otro sistema.

Podemos sustituir la pared adiabática que separa a A y a B por otra que permita el flujo de la energía (Fig. 1*b*) en una forma que conoceremos como calor. Un ejemplo podría ser una lámina de cobre delgada pero rígida. Esta pared se llama *diatérmica* (Este término, que también proviene del griego, significa que "el calor pasa a través de él", por lo que podemos tomarlo con la connotación de "conductor de calor".)

Cuando dos sistemas están en mutuo contacto a través de una pared diatérmica, el intercambio de energía causa que las propiedades macroscópicas de los dos sistemas cambien. Por ejemplo, si los sistemas son gases confinados, la presión debería ser una de las cantidades macroscópicas que cambian. Los cambios son relativamente rápidos al principio, pero se vuelven cada vez más lentos en el transcurso del tiempo, hasta que finalmente las

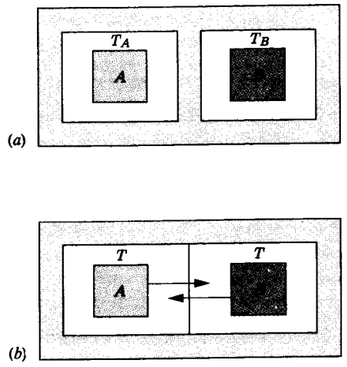


Figura 1 (*a*) Los sistemas A y B están separados por una pared adiabática. Los sistemas tienen temperaturas diferentes T_A y T_B. (*b*) Los sistemas A y B están separados por una pared diatérmica. Los sistemas, por haber llegado al equilibrio térmico, tienen la misma temperatura T.

propiedades macroscópicas se aproximan a valores constantes. Cuando ocurre esto, decimos que los dos sistemas están en *equilibrio térmico* entre sí.

Una manera de probar si los cuerpos están en equilibrio térmico es ponerlos en contacto a través de una pared diatérmica y observar si las propiedades macroscópicas de los sistemas cambian con el tiempo después de haber sido puestos en contacto. Si con el tiempo no se observan cambios en las propiedades macroscópicas, los sistemas estaban originalmente en equilibrio térmico. Sin embargo, pudiera ser inconveniente y hasta imposible mover a los dos sistemas con el fin de ponerlos en contacto entre sí. (Los sistemas podrían ser demasiado voluminosos para moverlos fácilmente, o podrían estar separados por una distancia muy grande.) Por lo tanto, generalizamos el concepto de equilibrio térmico de modo que los sistemas no necesariamente tienen que estar en contacto entre sí. Se dice que los cuerpos separados están en equilibrio térmico cuando están en estados tales que, si *estuviesen* conectados, estarían en equilibrio térmico.

La manera de probar si tales sistemas separados están en equilibrio térmico es usar un tercer sistema C. Al poner a C en contacto con A y luego con B, podríamos saber si A y B están en equilibrio térmico sin poner en contacto directo a A y a B. Esto se resume en un postulado llamado la *ley cero de la termodinámica* que se enuncia como sigue:

> *Si los sistemas A y B están cada uno en equilibrio térmico con un tercer sistema C, entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.*

Esta ley puede parecer simple, pero no es del todo obvia. Si A, B, y C fueran personas, podría ser cierto que

A y C conocieran a B y que no se conocieran entre sí. Si A y C son trozos de hierro no imantados y B es un imán, entonces A y C son ambos atraídos por B sin ser atraídos entre sí.

A la ley cero se le ha llamado idea lógica tardía. Salió a la luz la década de 1930, mucho tiempo después de que la primera y segunda leyes de la termodinámica hubieran sido propuestas y aceptadas. Como veremos más adelante, la ley cero define en efecto el concepto de temperatura, fundamental en las leyes primera y segunda de la termodinámica. La ley que establece la temperatura debería tener un número más bajo; de aquí que se le llame ley cero.

La temperatura

Cuando dos sistemas están en equilibrio térmico, decimos que tienen la misma *temperatura*. A la inversa, la temperatura es aquella propiedad de un sistema que iguala a la de otro sistema cuando los dos sistemas están en equilibrio térmico. Por ejemplo, supongamos que los sistemas son dos gases que inicialmente tienen temperatura, presión, y volumen diferentes. Después de haber sido puestos en contacto y esperado un tiempo lo suficientemente largo para que lleguen al equilibrio térmico, sus presiones *no* serán en general iguales, como tampoco sus volúmenes; sin embargo, sus temperaturas siempre serán iguales en el equilibrio térmico. Sólo mediante este argumento basado en el equilibrio térmico puede introducirse en la termodinámica la noción de temperatura.

Aunque la temperatura, en su uso cotidiano, es algo que resulta familiar para todos nosotros, es necesario darle un significado preciso para que tenga valor como unidad de medida científica. Nuestra noción subjetiva de la temperatura no es totalmente confiable. Por ejemplo, suponga que está usted sentado en su casa en una silla hecha parcialmente de tela, madera y metal. Toque las diversas partes de la silla para decidir cuál es "la más fría", al decir, cuál tiene la temperatura más baja. Es probable que llegue usted a la conclusión de que las partes de metal son las más frías. Sin embargo, cabría suponer que todas las partes de la silla han estado en la sala el tiempo suficiente como para estar en equilibrio térmico con el aire y, por lo tanto, deberían tener la misma temperatura que el aire. Lo que usted examina, al tocar el metal, es no sólo la temperatura de la silla sino también la capacidad de ésta para conducir el calor proveniente de su mano (presumiblemente más caliente). En este caso, su mano realiza una medición subjetiva e incorrecta de la temperatura. Además, ese juicio subjetivo cambiará con el tiempo, si mantiene su mano sobre el metal, cuando la mano y el metal alcancen el equilibrio térmico entre sí.

Puede usted también examinar esa subjetividad que mencionamos mojando una mano en agua fría y la otra en agua caliente. Comprobará que, al tomar un objeto de temperatura intermedia, la primera mano siente una temperatura más alta que la segunda. Puede tratar de ser un poco más objetivo y comparar dos muestras diferentes del mismo material a temperaturas diferentes tocando cada muestra con la misma mano, la cual puede distinguir "lo más caliente" de "lo más frío". Este procedimiento debería revelar cuál de los dos objetos está a una temperatura más alta, pero difícilmente es lo bastante cuantitativo como para que nos pueda dar la diferencia. Por lo tanto, es necesario especificar cuidadosamente una manera objetiva de medir la temperatura, lo cual constituye nuestro objetivo en este capítulo.

En el uso práctico de la ley cero, deseamos identificar al sistema C como un termómetro. Si el termómetro entra por separado en equilibrio térmico con los sistemas A y B e indica la misma temperatura, entonces podemos concluir que A y B están en equilibrio térmico y, por lo tanto, que tienen realmente la misma temperatura.

Otro postulado de la ley cero, más riguroso y más fundamental, es el siguiente:

> *Existe una cantidad escalar, llamada temperatura, que es una propiedad de todos los sistemas termodinámicos en equilibrio. Dos sistemas están en equilibrio térmico si y sólo si sus temperaturas son iguales.*

La ley cero define entonces el concepto de temperatura y lo especifica como aquella propiedad macroscópica de un sistema que será igual a la de otro sistema cuando estén en equilibrio térmico. La ley cero nos permite construir y usar los termómetros para medir la temperatura de un sistema, ya que ahora sabemos que un termómetro en contacto térmico con un sistema alcanzará una temperatura común con el sistema.

22-3 MEDICIÓN DE LA TEMPERATURA

En el capítulo 1 describíamos un procedimiento de dos etapas para establecer un patrón de medición o estándar de una cantidad física: definíamos una unidad básica, y luego especificábamos un procedimiento para hacer comparaciones con tal unidad básica. Por ejemplo, en el caso del tiempo, definíamos a la unidad básica en términos de la frecuencia de la luz de cierta longitud de onda emitida por los átomos de cesio. Para que pase 1 segundo se necesitan 9,192,631.770 de esas vibraciones. Contando el número de vibraciones correspondiente podemos usar (al menos en principio) esta escala para medir la vida media humana o incluso la edad del universo.

La temperatura es una de las siete unidades básicas (véase la tabla 1 del capítulo 1), por lo que podemos tratar la temperatura como hemos tratado a otras unidades básicas en el sistema SI: estableciendo un estándar y relacio-

nando a las demás escalas con el estándar. Sin embargo, la temperatura tiene una naturaleza diferente de la de otras unidades básicas en el SI, y, por lo tanto, este esquema no actuará realmente en esa forma simple. Por ejemplo, si definimos a un periodo de vibración de la luz emitida por un átomo de cesio como un patrón de tiempo, entonces dos de tales vibraciones duran el doble de tiempo, y cualquier intervalo de tiempo arbitrario puede ser, en efecto, medido en términos del número de vibraciones. Pero, incluso si definimos un estándar de temperatura, como la del agua hirviendo en ciertas condiciones, no tenemos un procedimiento para determinar una temperatura el doble de grande. Después de todo, dos marmitas de agua hirviendo tienen la misma temperatura que una marmita. No existe forma aparente de usar sólo este patrón para poder relacionar la temperatura del agua hirviendo con la del aceite hirviendo, por ejemplo; ninguna cantidad de agua en ebullición estará jamás en equilibrio térmico con el aceite en ebullición.

Para establecer una escala de medición de la temperatura adoptamos el procedimiento siguiente, que difiere del procedimiento usual para las unidades básicas del SI: buscamos una sustancia que tenga una propiedad que varíe con la temperatura, y medimos esa propiedad. La sustancia que elegimos se llama *sustancia termométrica*, y la propiedad que depende de la temperatura se llama *propiedad termométrica*. Ejemplos de ello podrían ser el volumen de un líquido (como en el termómetro de mercurio con bulbo de vidrio común), la presión de un gas mantenido a volumen constante, la resistencia eléctrica de un alambre, la longitud de una tira de metal, o el color del filamento de una lámpara, todos los cuales varían con la temperatura. *La elección de una de estas sustancias lleva a una escala individual de temperatura definida sólo para esa sustancia y que no necesariamente concuerda con otras escalas de temperatura definidas de manera independiente*. Para eliminar esta discrepancia es necesario adoptar estándares para la elección de determinada sustancia termométrica, determinada propiedad termométrica, y determinada relación entre esa propiedad y una escala de temperatura universalmente aceptada. Cada escala de temperatura por separado puede entonces ser calibrada contra la escala universal. En las secciones 22-4 y 26-5 describimos la escala universal aceptada.

Supongamos que nuestro termómetro está basado en un sistema en el cual medimos el valor de la propiedad termométrica X. La temperatura T es alguna función de X, $T(X)$. Elegimos la relación más sencilla posible entre T y X, la función lineal dada por

$$T(X) = aX + b, \tag{1}$$

donde deben ser determinadas las constantes a y b. Esta escala lineal significa que cada intervalo de temperatura ΔT corresponde al mismo cambio ΔX en el valor de la propiedad termométrica. Para determinar una temperatura en esta escala, elegimos dos puntos de calibración, definimos arbitrariamente las temperaturas T_1 y T_2 en esos puntos, y medimos los valores correpondientes X_1 y X_2 de la propiedad termométrica.

Los ejemplos más conocidos de este tipo de escala son las escalas Celsius y Fahrenheit usadas en los termómetros comunes, en los que la sustancia termométrica suele ser el mercurio y la propiedad termométrica puede ser su volumen, observado en la longitud de la columna de mercurio en un tubo delgado de vidrio. El comportamiento lineal significa en este caso que los intervalos entre las marcas de los grados en el tubo de vidrio de un termómetro son de tamaño uniforme.

Las escalas Celsius y Fahrenheit*

En casi todos los países del mundo se emplea la escala Celsius (también llamada escala de grados centígrados) para todas las mediciones populares y comerciales y la mayoría de las científicas. La escala Celsius se basó originalmente en dos puntos de calibración: el punto normal de congelación del agua, que se definió como 0°C, y el punto normal de ebullición del agua, que se definió como 100°C. Estos dos puntos se emplearon para calibrar termómetros, y luego se dedujeron las demás temperaturas por interpolación y extrapolación. Para expresar la temperatura en la escala Celsius, la cifra dada debe ir siempre acompañada del símbolo de grados (°).

La escala Fahrenheit emplea un grado más pequeño que la escala Celsius, y su cero se establece a una temperatura diferente. Originalmente se basó también en dos puntos fijos, cuyo intervalo se dividió en 100 grados: el punto de congelación de una mezcla de hielo y sal, y la temperatura normal del cuerpo humano. En esta escala, los puntos normales de congelación y de ebullición del agua vienen a ser, respectivamente, 32°F y 212°F. La relación entre las escalas Celsius y Fahrenheit es

$$T_F = \tfrac{9}{5}T_C + 32. \tag{2}$$

También en la escala Fahrenheit, debe utilizarse el símbolo de grados para expresar la temperatura como, por ejemplo, 98.6°F (la temperatura normal del cuerpo humano).

La conversión entre las escalas Fahrenheit y Celsius se lleva a cabo fácilmente recordando unos cuantos puntos

* Anders Celsius (1701-1744) fue un astrónomo sueco que, además de desarrollar la escala de temperatura que lleva su nombre, hizo mediciones de la longitud del arco de un meridiano, lo cual sirvió para corroborar la teoría de Newton sobre el achatamiento de la Tierra en los polos. Daniel Fahrenheit (1686-1736), contemporáneo de Celsius, fue un físico alemán que inventó los termómetros con líquidos de alcohol y de mercurio y los empleó para estudiar los puntos de ebullición y de congelación de los líquidos.

respectivos, tales como el punto normal de congelación (0°C = 32°F) y el punto normal de ebullición (100°C = 212°F) del agua, y haciendo uso de la igualdad entre un *intervalo* de 5 grados en la escala Celsius y un *intervalo* de 9 grados en la escala Fahrenheit, lo cual expresamos así:

$$9F^\circ = 5C^\circ. \tag{3}$$

Obsérvese que estos *intervalos* se expresan como F° y C°, y *no* como °F y °C. Las lecturas de la escala de temperatura se dan en °F o en °C (grados Fahrenheit o grados Celsius); las *diferencias* de lectura se dan en F° o en C° (grados Fahrenheit o grados Celsius).

La escala Kelvin*

En la escala Kelvin, uno de los puntos de calibración se define en una temperatura de cero, donde la propiedad termométrica tiene también un valor de cero; en efecto, la constante b de la ecuación 1 se establece como cero, en cuyo caso

$$T(X) = aX. \tag{4}$$

Para determinar una temperatura en esta escala necesitamos únicamente un punto P de calibración. En ese punto, se define que la temperatura es T_P y la propiedad termométrica tiene el valor medido X_P. En este caso

$$a = \frac{T_P}{X_P} \tag{5}$$

y por lo tanto

$$T(X) = T_P \frac{X}{X_P}. \tag{6}$$

Siguiendo la norma general, escogemos para nuestra calibración la temperatura a la cual coexisten en equilibrio el hielo, el agua líquida, y el vapor de agua. Este punto, que está muy cercano al punto normal de congelación del agua, se llama *punto triple* del agua (Fig. 2). Por acuerdo internacional se ha establecido que la temperatura en el punto triple sea

$$T_{tr} = 273.16\ \text{K},$$

donde K (= kelvin) es la unidad básica en el SI para la temperatura en la escala absoluta, idéntica a la escala de

* Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907) fue un físico e ingeniero escocés que contribuyó fundamentalmente a una amplia variedad de temas, incluyendo no sólo la termodinámica sino también la ley de conservación de la energía, la electricidad y el magnetismo, la acústica, y la hidrodinámica. Sus contribuciones científicas fueron conceptuadas como de enorme importancia en su época, por lo que, a su muerte, recibió sepultura en la Abadía de Westminster, en Londres.

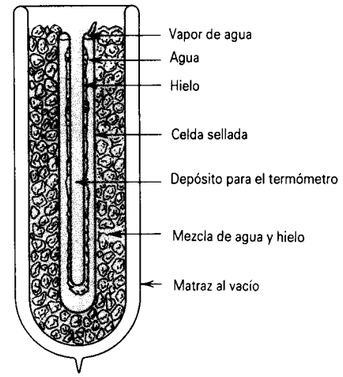


Figura 2 La celda del punto triple del National Institute of Standards and Technology (anteriormente la National Bureau of Standards) de Estados Unidos. La celda interior en forma de U contiene agua pura y está sellada, después de haberse extraído de ella todo el aire. Está sumergida en un baño de agua y hielo. El sistema está en el punto triple cuando el hielo, el agua, y el vapor de agua están todos ellos presentes, y en equilibrio, dentro de la celda. El termómetro que va a ser calibrado se inserta en el pozo central.

temperatura del gas ideal que se estudia en la sección siguiente. Así pues, se define que el kelvin es 1/273.16 de la temperatura del punto triple del agua. Con esta elección del punto de calibración, la ecuación 6 resulta

$$T(X) = (273.16\ \text{K})\frac{X}{X_{tr}}, \tag{7}$$

donde X_{tr} es el valor de la propiedad termométrica en el punto triple.

Una temperatura determinada a partir de la ecuación 7 es válida únicamente para esa propiedad termométrica en particular; otras propiedades termométricas y sustancias termométricas pueden dar lecturas de temperatura diferentes (véase al problema muestra 1). Para eliminar esta confusión entre las lecturas de termómetros diferentes, elegimos como norma aceptada un tipo de termómetro en el que la temperatura pueda determinarse independientemente de la naturaleza de la sustancia termométrica. Esta elección se trata en la sección siguiente.

El tamaño del grado es el mismo en las escalas Celsius y Kelvin, pero el cero de la escala Celsius se desplaza a un valor más conveniente. Hoy día ya no empleamos dos puntos fijos para definir la escala Celsius; en cambio, la escala Kelvin se define, y la relación entre la temperatura Celsius T_C y la temperatura Kelvin T ahora se establece así:

$$T_C = T - 273.15. \tag{8}$$

Los puntos de congelación y de ebullición del agua se miden ahora en la escala Kelvin y se convierten luego a

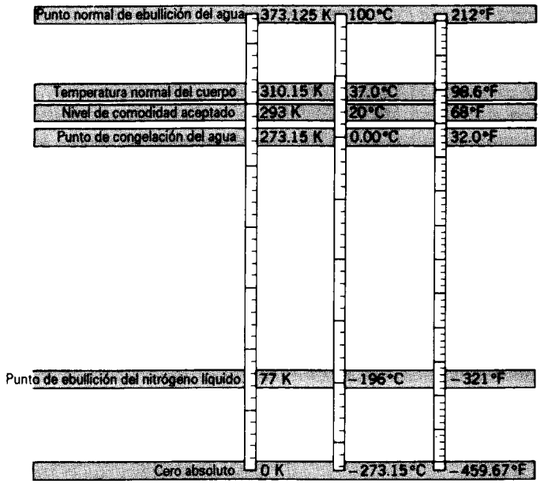


Figura 3 Comparación de las escalas Kelvin, Celsius, y Fahrenheit.

Celsius usando la ecuación 8. Los valores experimentales son, respectivamente, 0.00°C y 99.975°C. La figura 3 compara las escalas Fahrenheit, Celsius, y Kelvin.

Problema muestra 1 La resistencia de cierto alambre de platino aumenta en un factor de 1.392 entre el punto triple del agua y el punto de ebullición normal de ésta. Halle la temperatura por resistencia del platino del agua en ebullición.

Solución Usamos la ecuación 7, con la resistencia R como la propiedad termométrica X. No se nos da el valor de R_{tr}, pero sabemos que en el punto de ebullición del agua, $R = 1.392R_{tr}$. Entonces

$$T(R) = T_{tr}\frac{R}{R_{tr}} = (273.16\text{ K})(1.392) = 380.2\text{ K}.$$

Este valor da la "temperatura por resistencia del platino" del agua en ebullición. Otros termómetros darán valores diferentes; por ejemplo, la temperatura del agua hirviendo según un termopar de cobre-constantano es de 440 K. Cada una de estas lecturas es una temperatura determinada en una escala "propia", válida únicamente para ese aparato. La temperatura aceptada del punto de ebullición normal del agua es de 373.125 K la cual se determina usando el termómetro de gas a volumen constante que se describe en la sección siguiente.

22-4 LA ESCALA DE TEMPERATURA DE UN GAS IDEAL

La temperatura de un sistema debe tener un valor bien definido, independiente del medio empleado para medirla. Según la ecuación 7, sustancias termométricas diferentes dan todas la misma temperatura en el punto triple, pero (como lo hemos visto en el problema muestra 1) sus lecturas en otros puntos pueden diferir. Podríamos imaginar efectuar una serie de mediciones en que simultáneamente empleásemos propiedades termométricas distintas para determinar la temperatura de un sistema. Los resultados de tal prueba demostrarían que todos los termómetros dan lecturas diferentes. Podríamos continuar eligiendo una propiedad termométrica en particular, tal como la resistencia de un alambre, y medir la temperatura del sistema usando diferentes clases de alambre, hechos con materiales diferentes: de nuevo hallaríamos una amplia variación en las mediciones.

Para obtener una escala de temperatura definida, debemos elegir determinada clase de termómetro como estándar. La elección se haría, no sobre la base de la conveniencia experimental, sino averiguando si la escala de termperatura definida por un termómetro en particular es útil para formular las leyes de la física. La variación de lecturas más pequeña se encuentra que es entre los *termómetros de gas a volumen constante* que utilizan gases diferentes, lo cual sugiere elegir un gas como sustancia termométrica estándar. Sucede que cuando se reduce la cantidad de gas y por lo tanto su presión, la variación de las lecturas entre termómetros de gas que usan diferentes clases de gas se reduce también. De aquí que parezca haber algo fundamental respecto al comportamiento de un termómetro a volumen constante que contenga un gas a baja presión. Consideremos por lo tanto las propiedades del termómetro de gas a volumen constante.

Si el volumen de un gas se mantiene constante, su presión depende de la temperatura y aumenta linealmente con la elevación de la temperatura. El termómetro de gas a volumen constante emplea la presión de un gas a volumen constante como la propiedad termométrica.

La figura 4 muestra un diagrama del termómetro. Consta de un bulbo de vidrio, porcelana, cuarzo, platino, o una aleación de platino e iridio (dependiendo de la gama de temperaturas dentro de la cual se use), conectado por medio de un tubo capilar a un manómetro de mercurio. El bulbo B que contiene algún gas es puesto dentro del baño o entorno cuya temperatura T va a ser medida; al elevar o bajar el recipiente de mercurio R, el mercurio en la rama izquierda del tubo en U puede hacerse coincidir con una marca de referencia fija, manteniendo así a volumen constante al gas confinado. La diferencia entre la presión p del gas confinado en la rama izquierda del tubo y la presión p_0 de la atmósfera en la rama derecha del tubo está indicada por la altura h de la columna de mercurio, y entonces

$$p = p_0 - \rho gh, \tag{9}$$

donde ρ es la densidad del mercurio en el manómetro.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

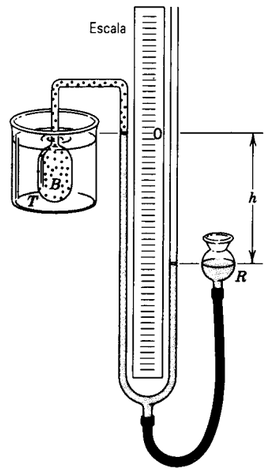


Figura 4 Termómetro de gas a volumen constante. El bulbo B está sumergido en un baño cuya temperatura T va a ser medida. La diferencia entre la presión del gas en el bulbo y la presión atmosférica se determina por la altura h de la columna de mercurio.

En la práctica el aparato es muy elaborado, y debemos llevar a cabo muchas correcciones, por ejemplo, (1) para compensar el pequeño cambio de volumen debido a la ligera contracción o expansión del bulbo y (2) para compensar el hecho de que no se ha sumergido en el baño todo el gas confinado (como el que se halla en el capilar). Supongamos que se han efectuado todas las correcciones, y que p es el valor corregido de la presión absoluta a la temperatura del baño. Entonces la temperatura se da provisionalmente por la fórmula

$$T(p) = (273.16\text{ K})\frac{p}{p_{tr}} \quad (\text{a } V \text{ constante}). \tag{10}$$

Pongamos cierta cantidad de gas, por ejemplo nitrógeno, dentro del bulbo de modo que cuando el bulbo esté rodeado de agua en el punto triple la presión p_{tr} sea igual a un valor definido, digamos 80 cm de Hg. Ahora sumergimos el bulbo en el sistema cuya temperatura T deseamos medir y, con el volumen mantenido constante en su valor previo, medimos la presión p del gas, según la ecuación 9, y calculamos la temperatura provisional T del sistema usando la ecuación 10. El resultado de esta medición se indica con un punto en la figura 5. Regresemos ahora el termómetro a la celda de punto triple y retiremos algo de gas, de modo que p_{tr} tenga un valor más pequeño, digamos 40 cm de Hg. Regresamos luego el termómetro al sistema desconocido, medimos el nuevo valor de p, y calculamos otra temperatura provisional T, indicada también en la figura 5. Continuamos con este mismo procedimiento, reduciendo la cantidad de gas en el bulbo y calculando la temperatura T para cada nuevo valor más bajo de p_{tr}. Si graficamos los valores de T contra p_{tr}, podemos extrapolar la curva resultante hasta la intersección con el eje donde $p_{tr} = 0$. En la figura 5 se muestran los puntos-dato para el N_2 y la extrapolación en línea recta resultante.

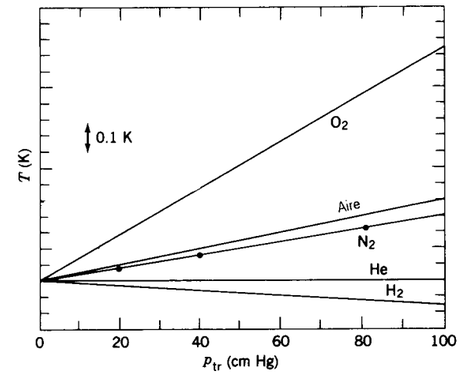


Figura 5 Cuando se reduce la presión del gas nitrógeno en un termómetro de gas a volumen constante de 80 cm de Hg a 40 y luego a 20, la temperatura calculada para el sistema tiende a un límite que corresponde a una presión de 0. Otros gases tienden al mismo límite, el cual es la temperatura T de gas ideal del sistema. La gama completa de la escala vertical es alrededor de 1 K para condiciones típicas.

Repetimos este procedimiento con otros gases en el termómetro diferentes al nitrógeno, y obtenemos los resultados mostrados en la figura 5. Las líneas muestran que las lecturas de la temperatura de un termómetro de gas a volumen constante depende del gas empleado a valores ordinarios de la presión de referencia. Sin embargo, al disminuir la presión de referencia, las lecturas de temperatura de los termómetros de gas a volumen constante que empleen gases diferentes tienden al mismo valor T, el cual podemos considerar como la temperatura del sistema. *El valor extrapolado de la temperatura depende sólo de las propiedades generales de los gases y no de un gas en particular.* Por lo tanto, definimos la *escala de temperatura de gas ideal:*

$$T = (273.16\text{ K})\lim_{p_{tr}\to 0}\frac{p}{p_{tr}} \quad (\text{a V constante}). \tag{11}$$

Elegimos como termómetro estándar un termómetro de gas a volumen constante que use una escala de temperatura definida por la ecuación 11.

Si la temperatura ha de ser en verdad una cantidad física fundamental, una en la que las leyes de la termodinámica puedan expresarse, es absolutamente necesario que su definición sea independiente de las propiedades de materiales específicos. Por ejemplo, no serviría que una canti-

TABLA 1 TEMPERATURAS DE ALGUNOS SISTEMAS

Sistema	*Temperatura* (K)
Plasma en un reactor de pruebas de fusión	10^8
Centro del Sol	10^7
Superficie del Sol	6×10^3
Punto de fusión del tungsteno	3.6×10^3
Punto de congelación del agua	2.7×10^2
Punto de ebullición normal del N_2	77
Punto de ebullición normal del ^4He	4.2
Temperatura media del universo	2.7
Refrigerador por dilución ^3He - ^4He	5×10^{-3}
Desimantación adiabática de la sal paramagnética	10^{-3}
Enfriamiento por espín nuclear	2×10^{-8}

dad básica como la temperatura dependiese de la dilatación del mercurio, de la resistividad eléctrica del platino, o de cualquier otra propiedad listada en algún manual. Elegimos al termómetro de gas como nuestro instrumento estándar precisamente porque en su operación no se hallan implicadas tales propiedades especificas de los materiales. Podemos usar cualquier gas y siempre obtendremos la misma respuesta.

Si bien nuestra escala de temperatura es independiente de las propiedades de cualquier gas determinado, sí depende, en cambio, de las propiedades de los gases en general (es decir, de las propiedades del así llamado gas ideal). La temperatura más baja que puede ser medida con un termómetro de gas es de alrededor de 1 K. Para obtener esta temperatura debemos emplear helio a baja presión, el cual permanece como gas a temperaturas más bajas que cualquier otro gas. No podemos dar un significado experimental a temperaturas por debajo de 1 K por medio de un termómetro de gas.

Nos gustaría definir una escala de temperatura de modo tal que sea independiente de las propiedades de cualquier sustancia en particular. En la sección 26-5 mostramos que la escala de temperatura termodinámica absoluta, llamada la escala Kelvin, es esa escala. Mostraremos también que la escala del gas ideal y la escala Kelvin son idénticas en la gama de temperaturas en que puede ser empleado un termómetro de gas. Por esta razón usamos unidades kelvin para la temperatura del gas ideal, como ya lo hicimos en la ecuación 11. La tabla 1 lista las temperaturas en kelvin de varios cuerpos y procesos.

En la sección 26-5 mostraremos también que la escala Kelvin tiene un *cero absoluto* de 0 K y que es imposible enfriar un sistema por debajo de 0 K. El cero absoluto de temperatura ha desafiado todos los intentos de alcanzarlo experimentalmente, pero se han conseguido temperaturas de cero absoluto dentro de un intervalo pequeño (10^{-8} K).

Si bien existe una conexión directa, como lo veremos en el capítulo 23, entre el movimiento microscópico de las moléculas y la temperatura macroscópica, *no* cesa todo movimiento molecular en el cero absoluto de temperatura. La conexión entre la temperatura y la energía cinética molecular se basa en conceptos clásicos, mientras que la teoría cuántica nos dice que existe un límite más bajo diferente de cero para la energía cinética molecular, aun en el cero absoluto. Esta *energía del punto cero* no puede ser deducida a partir de los cálculos clásicos.

La escala internacional de temperatura

La medición precisa de una temperatura con un termómetro de gas es una tarea difícil que requiere muchos meses de trabajo arduo en el laboratorio. En la práctica, el termómetro de gas se usa únicamente para establecer ciertos puntos fijos que puedan ser empleados más tarde para calibrar otros termómetros secundarios más convenientes.

En el uso práctico, como en la calibración de termómetros industriales o científicos, ha sido adoptada la Escala Internacional de Temperatura. Esta escala consta de un grupo de procedimientos que proporcionan en la práctica las mejores aproximaciones posibles a la escala Kelvin. La escala adoptada consta de un conjunto de puntos fijos, junto con los instrumentos que deben utilizarse para interpolar entre estos puntos fijos y extrapolarlos más allá del punto fijo más alto. Aproximadamente, cada 20 años el Comité Internacional de Pesas y Medidas ha adoptado una escala nueva; en la tabla 2 se muestran los puntos fijos de la más reciente (1990).

22-5 DILATACIÓN TÉRMICA

Sucede a menudo que podemos aflojar una tapa de metal apretada de un frasco sometiéndola a la acción de un chorro de agua caliente. Al elevarse la temperatura, la tapa de metal se dilata ligeramente con relación al frasco de vidrio. No siempre es deseable la dilatación térmica, como lo sugiere la figura 6. Todos hemos visto las juntas de dilatación situadas en las calzadas de los puentes. Las tuberías de las refinerías suelen tener un bucle de expansión, con el fin de que la tubería no se deforme al elevarse la temperatura. Los materiales usados para obturaciones dentales tienen propiedades de dilatación similares a las del esmalte de los dientes. En la fabricación de aeroplanos se diseñan a menudo remaches y otros afianzadores de modo que deban ser enfriados en hielo seco antes de su inserción, dejando luego que se dilaten para lograr el ajuste perfecto. Los termómetros y los termostatos pueden estar basados en las diferencias de dilatación entre los componentes de una laminilla bimetálica; véase la figura 7. En un termómetro de tipo bastante común, la laminilla bimetálica tiene forma helicoidal, de modo que se enrolla y desenrolla con los cambios de temperatura; véase la figura 8. Los conocidísimos termómetros de líquido dentro de vidrio se basan en el hecho de que líquidos tales como el mercurio o el alcohol se dilatan en un grado diferente (mayor) de lo que lo hacen sus recipientes de vidrio.

TABLA 2 PUNTOS FIJOS PRIMARIOS EN LA ESCALA INTERNACIONAL DE TEMPERATURAS DE 1990†

Substancia	*Estado*	*Temperatura* (K)
Helio	Punto de ebullición	3–5§
Hidrógeno	Punto triple	13.8033
Hidrógeno	Punto de ebullición‡	17.025–17.045[c]
Hidrógeno	Punto de ebullición	20.26–20.28[c]
Neón	Punto triple	24.5561
Oxígeno	Punto triple	54.3584
Argón	Punto triple	83.8058
Mercurio	Punto triple	234.3156
Agua	Punto triple	273.16
Galio	Punto de fusión	302.9146
Indio	Punto de congelación	429.7485
Estaño	Punto de congelación	505.078
Cinc	Punto de congelación	692.677
Aluminio	Punto de congelación	933.473
Plata	Punto de congelación	1234.93
Oro	Punto de congelación	1337.33
Cobre	Punto de congelación	1357.77

† Véase "The International Temperature Scale of 1990 (ITS-90)," por H. Preston-Thomas, *Metrologia*, 27 (1990), pág. 3.
‡ Este punto de ebullición es a una presión de $\frac{1}{3}$ de atmósfera. Todos los demás puntos de ebullición, de fusión, o de congelación, son a una presión de 1 atm.
§ La temperatura del punto de ebullición varía un poco con la presión del gas encima del líquido. La escala de temperaturas da la relación entre T y p que puede emplearse para calcular T para una p dada.

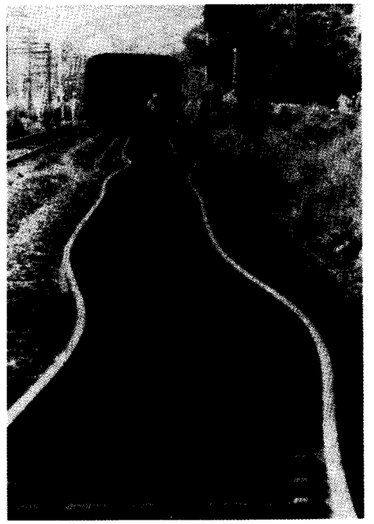


Figura 6 Deformación de las vías de ferrocarril debida a la dilatación térmica en un día muy caluroso. Las juntas de expansión entre los rieles de la vía pueden evitar esta deformación.

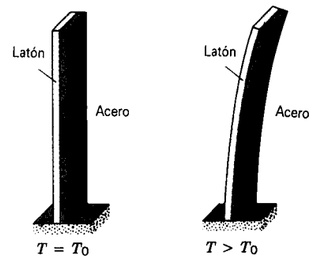


Figura 7 Laminilla bimetálica, que consta de una laminilla de latón y una laminilla de acero soldadas entre sí, a temperatura T_0. A temperaturas más altas de T_0, la laminilla se dobla como se muestra; a temperaturas más bajas se dobla en sentido opuesto. Muchos termostatos funcionan según este principio, usando el movimiento del extremo de la laminilla para formar o romper un contacto eléctrico.

Podemos entender esta dilatación considerando un modelo sencillo de la estructura de un sólido cristalino. Los átomos se mantienen juntos entre sí en un arreglo regular por medio de fuerzas eléctricas, que son como las que serían ejercidas por un conjunto de resortes que uniesen a los átomos. Podemos entonces formarnos una imagen del cuerpo sólido como si fuera un colchón de resortes microscópicos (Fig. 9). Estos "resortes" son bastante rígidos y no son ideales en absoluto (véase el problema 3 del capítulo 15), existiendo alrededor de 10^{23} de ellos por centímetro cúbico. Los átomos de los sólidos están vibrando a cualquier temperatura. La amplitud de la vibración es de alrededor de 10^{-9} cm, más o menos un décimo de un diámetro atómico, y la frecuencia es de alrededor de 10^{13} Hz.

Cuando aumenta la temperatura, los átomos vibran con una amplitud mayor, y la distancia promedio entre los átomos aumenta. (Véase el estudio de la base microscópica de la dilatación térmica al final de esta sección.) Esto conduce a una dilatación de todo el cuerpo sólido. El cambio en *cualquier* dimensión lineal del sólido, tal como su longitud, su ancho, o su espesor, se llama *dilatación lineal*. Si la longitud de esta dimensión lineal es L, el cambio de temperatura ΔT causa un cambio de longitud ΔL. Por medio de la experimentación hallamos que, si ΔT es lo suficientemente pequeña, este cambio de longitud ΔL es proporcional al cambio de temperatura ΔT y a la longitud original L. Por lo tanto, podemos escribir

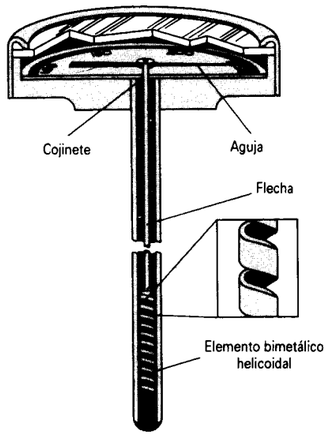


Figura 8 termómetro basado en una laminilla bimetálica. La laminilla tiene forma helicoidal, que se enrolla y desenrolla al cambiar la temperatura.

$$\Delta L = \alpha L\, \Delta T, \tag{12}$$

donde α, llamada el *coeficiente de dilatación lineal*, tiene valores diferentes para materiales diferentes. Reescribiendo esta fórmula obtenemos

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta T}, \tag{13}$$

de modo que α tiene el significado de un cambio fraccionario en longitud por grado de cambio de temperatura.

En rigor, el valor de α depende de la temperatura real y de la temperatura de referencia elegida para determinar a L (véase el problema 23). Sin embargo, su variación es usualmente despreciable comparada con la precisión con la que necesitan ser llevadas a cabo las mediciones. A menudo es suficiente elegir un valor promedio que pueda ser tratado como una constante dentro de cierta gama de temperaturas. En la tabla 3 se listan los valores experimentales del coeficiente de dilatación lineal promedio de varios sólidos comunes. Para todas las sustancias listadas, el cambio de tamaño consiste en una dilatación al elevarse la temperatura, ya que α es positivo. El orden de magnitud de la dilatación es de alrededor de 1 milímetro por metro de longitud por 100 grados Celsius. (Obsérvese el uso de C°, y no de °C, para expresar aquí los cambios de temperatura.)

Problema muestra 2 Una escala métrica de acero va a ser marcada de modo que los intervalos de un milímetro sean precisos dentro de unos 5×10^{-5} mm a cierta temperatura. ¿Cuál es la variación máxima de la temperatura permisible durante el marcado?

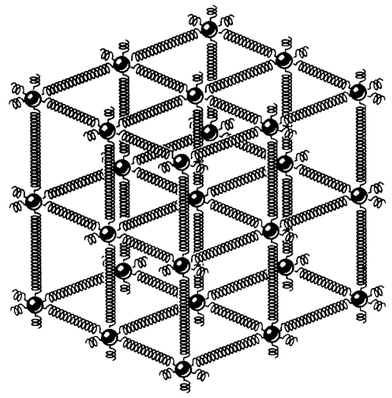


Figura 9 Un sólido se comporta en muchos sentidos como si fuese una colección de átomos unidos por fuerzas elásticas (representadas aquí por resortes).

Solución Partiendo de la ecuación 12, tenemos

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L} = \frac{5 \times 10^{-5}\ \text{mm}}{(11 \times 10^{-6}/\text{C°})(1.0\ \text{mm})} = 4.5\ \text{C°},$$

donde hemos usado el valor de α para el acero según la tabla 3. La temperatura durante el marcado debe mantenerse constante dentro de unos 5°C, y la escala debe ser usada dentro del mismo intervalo de la temperatura a la cual fue hecha.

Obsérvese que si se hubiera usado la aleación invar en lugar de acero, podríamos obtener la misma precisión dentro de un intervalo de temperatura de unos 75 C°; o, lo que es equivalente, si pudiéramos mantener la misma variación de la temperatura (5 C°), podríamos obtener una precisión de unos 3×10^{-6} mm debido a los cambios de temperatura.

En muchos sólidos, llamados *isotrópicos*, el porcentaje del cambio en longitud para un cambio de temperatura dado es el mismo para todas las líneas del sólido.

TABLA 3 ALGUNOS COEFICIENTES DE DILATACIÓN LINEAL PROMEDIO†

Sustancia	$\alpha(10^{-6}$ por C°)
Hielo	51
Plomo	29
Aluminio	23
Latón	19
Cobre	17
Acero	11
Vidrio (ordinario)	9
Vidrio (Pyrex)	3.2
Aleación invar	0.7
Cuarzo (fundido)	0.5

† Se consignan valores promedios típicos en el intervalo de temperatura de 0°C a 100°C, salvo para el hielo cuyo intervalo es de -10°C a 0°C.

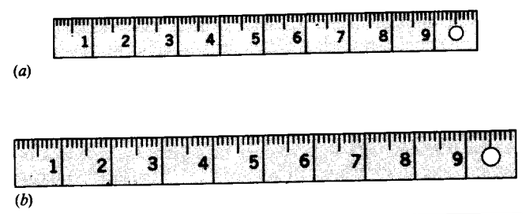


Figura 10 Una regla de acero a dos temperaturas diferentes. La dilatación aumenta en proporción en todas las dimensiones: la regla, los números, el orificio, y el espesor crecen todos en el mismo factor. (La dilatación mostrada está muy exagerada; para obtener tal expansión se requeriría un aumento de temperatura de unos ¡20,000 C°!)

La expansión es bastante análoga a una amplificación fotográfica, excepto que un sólido es tridimensional. Entonces, si tenemos una lámina plana con un orificio troquelado en ella, $\Delta L/L$ (= $\alpha\, \Delta T$) para una ΔT dada es la misma para la longitud, el espesor, la diagonal de una cara, la diagonal del cuerpo, y el diámetro del orificio. Cada línea, ya sea recta o curva, se alarga en la razón α por grado de elevación de la temperatura. Si usted graba su nombre sobre la lámina, la línea que representa a su nombre tiene el mismo cambio fraccionario de longitud que cualquier otra línea. En la figura 10 se muestra la analogía con una amplificación fotográfica.

Teniendo en cuenta estas ideas, debería serle a usted posible demostrar (véanse los problemas 30 y 31) que, con un alto grado de precisión, el cambio fraccionario en el área A por cambio de temperatura en grados de un sólido isotrópico es 2α, es decir,

$$\Delta A = 2\alpha A\, \Delta T, \tag{14}$$

y el cambio fraccionario en el volumen V por cambio de temperatura en grados de un sólido isotrópico es 3α, es decir,

$$\Delta V = 3\alpha V\, \Delta T. \tag{15}$$

Puesto que la forma de un fluido no es precisa, únicamente el cambio de volumen con la temperatura es significativo. Los gases responden fuertemente a los cambios de temperatura o de presión, mientras que el cambio de volumen de los líquidos con los cambios de temperatura o de presión es mucho más pequeño. Si hacemos que β represente al coeficiente de dilatación volumétrica de un líquido, de modo que

$$\beta = \frac{\Delta V/V}{\Delta T}, \tag{16}$$

hallamos que β es relativamente independiente de la temperatura. Los líquidos se dilatan típicamente con un aumento de la temperatura, siendo su dilatación volumétrica

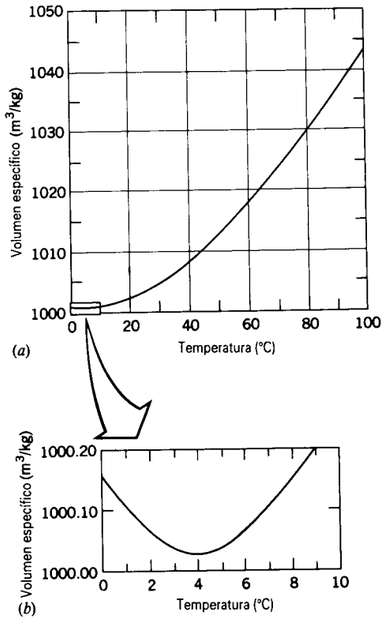


Figura 11 (*a*) Volumen específico (volumen ocupado por una masa en particular) del agua en función de su temperatura. El volumen específico es el inverso de la densidad (masa por unidad de volumen). (*b*) Ampliación de la región cercana a 4°C, mostrando un mínimo en el volumen específico (o una densidad máxima).

generalmente alrededor de 10 veces más grande que la de los sólidos.

Sin embargo, el líquido más común, el agua, no se comporta como muchos otros líquidos. En la figura 11 mostramos la curva de dilatación volumétrica del agua. Obsérvese que a más de 4°C el agua se dilata al aumentar la temperatura, aunque no linealmente. (Esto es, β no es constante durante estos intervalos grandes de temperatura.) Empero, al bajar la temperatura de 4°C a 0°C, el agua se dilata en lugar de contraerse, lo cual es la razón de que los lagos se congelen primero en su superficie. Tal dilatación con el descenso de la temperatura no se observa en ningún otro líquido común; se observa en sustancias parecidas al hule y en ciertos sólidos cristalinos dentro de intervalos de temperatura limitados. La densidad del agua tiene un máximo en 3.98°C, donde su valor es de 999.973 kg/m³. (En un principio se suponía que el kilogramo patrón y el metro patrón correspondían a una densidad máxima del agua de 1000 kg/m³, o sea 1 g/cm³. Sin embargo, mediciones más precisas demuestran que los patrones internacionales no corresponden exactamente a este valor.)

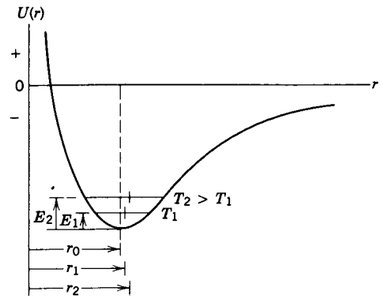


Figura 12 Curva de la energía potencial de dos átomos adyacentes de un sólido en función de su distancia de separación internuclear. La separación en equilibrio es r_0. Puesto que la curva es asimétrica, la separación promedio, (r_1, r_2) aumenta al aumentar la temperatura (T_1, T_2) y la energía vibratoria (E_1, E_2).

Base microscópica de la dilatación térmica *(Opcional)*

A nivel microscópico, la dilatación térmica de un sólido sugiere un aumento en la separación promedio entre los átomos del sólido. La curva de la energía potencial de dos átomos adyacentes en un sólido cristalino en función de su separación internuclear es una curva asimétrica como la de la figura 12. Cuando los átomos se acercan entre sí, disminuyendo su separación a partir del valor de equilibrio r_0, entran en juego fuerzas de repulsión fuertes, y la energía potencial se eleva rápidamente ($F = -dU/dr$); cuando los átomos se alejan entre sí, aumentando su separación a partir del valor de equilibrio, intervienen fuerzas de atracción un poco más débiles y la energía potencial se eleva más lentamente. Para una energía vibratoria dada la separación de los átomos cambia periódicamente de un valor mínimo a un valor máximo, siendo la separación promedio mayor que la separación de equilibrio a causa de la naturaleza asimétrica de la curva de la energía potencial. Para una energía vibratoria aún más alta la separación promedio es aun mayor. El efecto se acentúa porque, como lo sugiere la figura 12, la energía cinética es más pequeña para separaciones más grandes; entonces las partículas se mueven más lentamente e invierten más tiempo en separaciones más grandes, contribuyendo entonces con una parte mayor al tiempo promedio. Puesto que la energía vibratoria aumenta al elevarse la temperatura, la separación promedio entre los átomos aumenta con la temperatura, y todo el sólido se dilata.

Obsérvese que si la curva de la energía potencial fuese simétrica con respecto a la separación de equilibrio, entonces la separación promedio sería igual a la separación de equilibrio, sin importar cuán grande fuese la amplitud de la vibración. De aquí que la dilatación térmica sea una consecuencia directa de la desviación de la simetría de la curva característica de la energía potencial de los sólidos.

Algunos sólidos cristalinos, en ciertas regiones de temperatura, pueden contraerse al elevarse la temperatura. El análisis anterior es válido si suponemos que existen únicamente modos de vibración compresivos (longitudinales) o que predominan estos modos. Sin embargo, los sólidos pueden vibrar igualmente en modos similares al modo de corte (transversales), y estos modos de vibración permiten que el sólido se contraiga al elevarse la temperatura, disminuyendo la separación promedio de los planos de los átomos. En ciertos tipos de estructura cristalina y en ciertas regiones de temperatura, estos modos de vibración transversales pueden predominar sobre los longitudinales, produciendo un coeficiente neto de dilatación térmica negativo.

Debe hacerse hincapié en que los modelos microscópicos que se presentan aquí, constituyen una gran simplificación de un fenómeno complejo que puede ser tratado con mayor detalle mediante la mecánica estadística y la teoría cuántica. ■

PREGUNTAS

1. ¿Es la temperatura un concepto microscópico o macroscópico?
2. ¿Podemos definir la temperatura como una cantidad derivada, en términos de longitud, masa, y tiempo? Piense en un péndulo, por ejemplo.
3. El cero absoluto es una temperatura mínima. ¿Existe una temperatura máxima?
4. ¿Puede un objeto estar más caliente que otro si ambos están a la misma temperatura? Explique.
5. ¿Existen cantidades físicas, distintas a la temperatura, que tiendan a igualarse cuando se juntan dos sistemas diferentes?
6. Un trozo de hielo y un termómetro más caliente están suspendidos en un recipiente al vacío y aislado, de modo que no entran en contacto. ¿Por qué disminuye la lectura del termómetro durante cierto tiempo?
7. ¿Qué cualidades hacen a una propiedad termométrica en particular apta para usarse en un termómetro práctico?
8. ¿Qué dificultades surgirían si se definiese la temperatura en términos de la densidad del agua?
9. Sea p_3 la presión en el bulbo de un termómetro de gas a volumen constante cuando el bulbo está a la temperatura del punto triple de 273.16 K y p la presión cuando el bulbo está a la temperatura ambiente. Se tienen tres termómetros de gas a volumen constante: para A el gas es oxígeno y p_3 = 20 cm Hg; para B el gas es también oxígeno pero p_3 = 40 cm Hg; para C el gas es hidrógeno y p_3 = 30 cm Hg. Los valores de p medidos en los tres termómetros son p_A, p_B, y p_C. (*a*) Puede obtenerse un valor aproximado de la temperatura ambiente T con cada uno de los termómetros usando

$$T_A = (273.16\text{ K})(p_A/20\text{ cm Hg}),$$

$$T_B = (273.16\text{ K})(p_B/40\text{ cm Hg}),$$

$$T_C = (273.16\text{ K})(p_C/30\text{ cm Hg}).$$

Marque si es cierta o falsa para cada una de las aseveraciones siguientes: (1) Con el método descrito, los tres termómetros darán el mismo valor de T. (2) Los dos termómetros de oxígeno concordarán entre sí pero no con el termómetro de hidrógeno. (3) Cada uno de los tres termómetros dará un valor de T diferente. (*b*) En caso de que exista un desacuerdo entre los tres termómetros, explique cómo cambiaría usted el método de usarlos para hacer que los tres den el mismo valor de T.

10. El editor en jefe de una revista de negocios bien conocida, al discutir los posibles efectos de calentamiento asociados con el aumento en la concentración de bióxido de carbono en la atmósfera terrestre (efecto de invernadero), escribió: "Las regiones polares podrían llegan a ser tres veces más cálidas que ahora, ..." ¿Qué se supone usted que quería decir, y qué dijo literalmente? (Véase "Warmth and Temperature: A Comedy of Errors", por Albert A. Bartlett, *The Physics Teacher*, noviembre de 1984, pág. 517).
11. Aunque parece que el cero absoluto de temperatura es imposible de obtener experimentalmente, en el laboratorio se han logrado temperaturas tan bajas como 0.00000002 K. ¿Por qué se esfuerzan los físicos, como realmente lo hacen, para obtener temperaturas aún más bajas? ¿No es ésta lo suficientemente baja para todos los propósitos prácticos?
12. Usted pone dos ollas de agua sin tapar, una conteniendo agua caliente y la otra conteniendo agua fría, a la intemperie en un clima por debajo del punto de congelación. La olla con el agua caliente comenzará por lo general a congelarse primero. ¿Por qué? ¿Qué sucedería si usted tapase las ollas?
13. ¿Puede asignarse una temperatura a un vacío?
14. ¿Tiene implícito nuestro "sentido de la temperatura" un sentido de dirección; es decir, más caliente significa necesariamente una temperatura mayor, o es esto simplemente una convención arbitraria? Por cierto que, Celsius eligió originalmente al punto de vaporización como 0°C y al punto de congelación como 100°C.
15. En Estados Unidos muchas etiquetas de productos médicos informan al usuario que debe almacenarlos a menos de 86°F. ¿Por qué 86? (*Sugerencia*: Haga el cambio a Celsius) (Véase *The Science Almanac*, 1985-1986, pág. 430.)
16. ¿Cómo sugeriría usted medir la temperatura de (*a*) el Sol, (*b*) la atmósfera superior de la Tierra, (*c*) un insecto, (*d*) la Luna, (*e*) el fondo del océano, y (*f*) el helio líquido?
17. Considerando las escalas Celsius, Fahrenheit, y Kelvin, ¿corresponde alguna a la "escala de la naturaleza"? Explique.
18. ¿Es un gas mejor que otro pára construir un termómetro estándar de gas a volumen constante? ¿Qué propiedades son deseables en un gas para tales objetivos?
19. Dé algunas objeciones al uso de un termómetro de agua dentro de vidrio. ¿Es una mejora el mercurio en vidrio? De ser así, explique por qué.
20. Explique por qué la columna de mercurio desciende primero y luego se eleva al calentar con una llama el termómetro de este metal.
21. ¿Cuáles son las dimensiones de α, el coeficiente de dilatación lineal? ¿Depende el valor de α de la unidad de longitud empleada? Cuando se emplean grados Fahrenheit en lugar de grados Celsius como la unidad de cambio de la temperatura, ¿cambia el valor numérico de α? De ser así, ¿cómo? Si no es así, pruébelo.
22. Una bola de metal puede pasar a través de un anillo de metal. Sin embargo, al calentar la bola ésta se pega en el anillo. ¿Qué pasaría si calentásemos el anillo en lugar de la bola?
23. Como un elemento de control en el termostato común se emplea una laminilla bimetálica, que consta de dos laminillas de diferente metal remachadas entre sí. Explique cómo trabaja.
24. Dos laminillas, una de hierro y otra de cinc, se remachan entre sí lado con lado para formar una barra recta que se curva al ser calentada. ¿Por qué está el hierro en el interior de la curva?
25. Explique cómo puede mantenerse constante con la temperatura el periodo de un reloj de péndulo adosando tubos verticales de mercurio a la base del péndulo.
26. ¿Por qué se hace que una chimenea esté aislada, es decir, que no sea parte del soporte estructural de la casa?
27. El agua se dilata al congelarse. ¿Podemos definir un coeficiente de dilatación volumétrica para el proceso de congelación?
28. Explique por qué la dilatación aparente de un líquido en un bulbo de vidrio no da la dilatación verdadera del líquido.
29. ¿Depende el cambio de volumen de un objeto al aumentar su temperatura de si el objeto tiene cavidades en su interior, quedando en éste todas las demás características igual?
30. ¿Por qué es mucho más difícil hacer una determinación precisa del coeficiente de dilatación de un líquido que de un sólido?
31. El modelo común de un sólido supone que los átomos son puntos que ejecutan un movimiento armónico simple en torno a posiciones medias de la red. ¿Cuál sería el coeficiente de dilatación lineal de esta red?
32. Explique el hecho de que la temperatura del océano a grandes profundidades sea casi constante durante todo el año, a una temperatura de unos 4°C.
33. Explique por qué los lagos se congelan primero en la superficie.
34. ¿Qué causa que las tuberías de agua exploten en el invierno?
35. ¿Qué puede usted concluir respecto a cómo depende el punto de fusión del hielo de la presión partiendo del hecho de que el hielo flota en el agua?

PROBLEMAS

Sección 22-3 Medición de la temperatura

1. Un *termómetro de resistencia* es un termómetro en el que la resistencia eléctrica cambia con la temperatura. Estamos en libertad de definir temperaturas medidas por uno de estos termómetros en kelvin (K) que sean directamente

proporcionales a la resistencia R, medida en ohms (Ω). Se halla que cierto termómetro de resistencia tiene una resistencia R de 90.35 Ω cuando su bulbo se sumerge en agua a la temperatura del punto triple (273.16 K). ¿Qué temperatura indica el termómetro si el bulbo está situado en un entorno tal que su resistencia es de 96.28 Ω?

2. Se forma un termopar a partir de dos metales diferentes unidos en dos puntos de modo tal que se produzca un pequeño voltaje cuando las dos uniones están a temperaturas diferentes. En un termopar de hierro-constantano, con una unión mantenida a 0°C, el voltaje de salida varía linealmente desde 0 hasta 28.0 mV al elevar la temperatura de la otra unión desde 0 hasta 510°C. Halle la temperatura de la unión variable cuando la salida del termopar sea de 10.2 mV.
3. La amplificación o *ganancia* de un amplificador de transistores puede depender de la temperatura. La ganancia para cierto amplificador a la temperatura ambiente (20.0°C) es de 30.0, mientras que a 55.0°C es de 35.2. ¿Cuál sería la ganancia a 28.0°C si la ganancia depende linealmente de la temperatura dentro de este limitado intervalo?
4. El cero absoluto es -273.15°C. Halle el cero absoluto en la escala Fahrenheit.
5. Si su médico le dice que su temperatura es de 310 kelvin sobre el cero absoluto, ¿se preocuparía? Explique su respuesta.
6. (*a*) La temperatura de la superficie del Sol es de unos 6000 K. Exprese ésta en la escala Fahrenheit. (*b*) Exprese la temperatura normal del cuerpo humano, 98.6°F, en la escala Celsius. (*c*) En la región continental de Estados Unidos, la temperatura más baja registrada oficialmente es de -70°F en Rogers Pass, Montana. Exprese ésta en la escala Celsius. (*d*) Exprese el punto de ebullición normal del oxígeno, -183°C, en la escala Fahrenheit. (*e*) ¿Qué temperatura Celsius cree usted que tiene una habitación si el calor en ella resulta insoportable?
7. ¿A qué temperatura darían los siguientes pares de escalas la misma lectura: (*a*) Fahrenheit y Celsius, (*b*) Fahrenheit y Kelvin, y (*c*) Celsius y Kelvin?
8. ¿A qué temperatura es la lectura en la escala Fahrenheit igual (*a*) al doble de la Celsius y (*b*) a la mitad de la Celsius?
9. A diario podemos comprobar que los objetos calientes y fríos se enfrían o se calientan respecto a la temperatura de su entorno. Si la diferencia de temperatura ΔT entre un objeto y su entorno ($\Delta T = T_{obj} - T_{ent}$) no es demasiado grande, la razón de enfriamiento o de calentamiento del objeto es proporcional, aproximadamente, a esta diferencia de temperatura; es decir,

$$\frac{d\,\Delta T}{dt} = -A(\Delta T),$$

donde A es una constante El signo menos se debe a que ΔT disminuye con el tiempo si ΔT es positiva, y aumenta si ΔT es negativa. Esto se conoce como la *ley de Newton para el enfriamiento*. (*a*) ¿De qué factores depende A? ¿Cuáles son sus dimensiones? (*b*) Si en algún instante $t = 0$ la diferencia de temperatura es ΔT_0, demuestre que esa diferencia es

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}$$

en un tiempo t más tarde.

10. Por la mañana temprano se descompone el calentador de una casa. La temperatura exterior es de -7.0°C. Como resultado, la temperatura en el interior desciende de 22 a 18°C en 45 min. ¿Cuánto tiempo más tomará para que la temperatura interior descienda otros 4.0°C ? Suponga que la temperatura exterior no cambia y que se aplica la ley de enfriamiento de Newton; vea el problema anterior.

Sección 22-4 La escala de temperatura de un gas ideal

11. Si la temperatura del gas en el punto de vapor es de 373.15 K, ¿cuál será el valor limitante de la relación de las presiones de un gas en el punto de vaporización y del agua en el punto triple cuando el gas se mantiene a volumen constante?
12. Un termómetro de gas se construye de dos bulbos que contienen gas, cada uno de los cuales se pone en un baño de agua, como se muestra en la figura 13. La diferencia de presión entre los dos bulbos se mide por medio de un manómetro de mercurio ilustrado en la figura. Depósitos apropiados, no mostrados en el diagrama, mantienen constante el volumen de gas en ambos bulbos. No hay diferencia en la presión cuando ambos baños se encuentran en el punto triple del agua. La diferencia de presión es de 120 mm Hg cuando un baño está en el punto triple y el otro en el punto de ebullición del agua. Por último, la diferencia de presión es de 90.0 mm Hg cuando un baño se encuentra en el punto triple y el otro tiene una temperatura desconocida. Halle la temperatura desconocida.

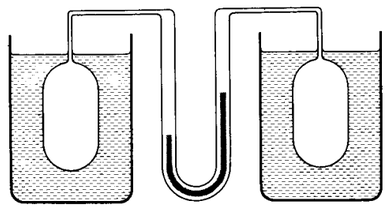


Figura 13 Problema 12.

13. Se ensamblan dos termómetros de gas a volumen constante; uno utiliza nitrógeno como gas de trabajo y el otro utiliza helio. Ambos contienen el gas suficiente para que p_{tr} = 100 cm Hg. ¿Cuál es la diferencia entre las presiones de los dos termómetros si ambos están sumergidos en un baño de agua al punto de ebullición? ¿Cuál de las dos presiones es más alta? Véase la figura 5.

Sección 22-5 Dilatación térmica

14. El asta de aluminio de una bandera tiene 33 m de altura. ¿En cuánto aumenta su longitud cuando la temperatura aumenta en 15 C°?

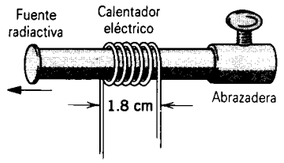


Figura 14 Problema 22.

15. El espejo de vidrio Pyrex del telescopio del observatorio de Monte Palomar (el telescopio Hale) tiene un diámetro de 200 in. Las temperaturas más extremas registradas en el Monte Palomar son de -10°C y 50°C. Determine el cambio máximo del diámetro del espejo.
16. Un orificio circular practicado en una placa de aluminio tiene 2.725 cm de diámetro a 12°C. ¿Cuál es el diámetro cuando la temperatura de la placa se eleva a 140°C?
17. Se colocan unas vías de acero para el ferrocarril cuando la temperatura es de -5.0°C. Una sección estándar de riel tiene entonces 12.0 m de longitud. ¿Qué claro deberá dejarse entre secciones de riel de modo que no exista una compresión cuando la temperatura suba hasta los 42°C?
18. Una ventana de vidrio tiene 200 cm por 300 cm a 10°C. ¿En cuánto ha aumentado su área cuando su temperatura es de 40°C? Suponga que el vidrio puede dilatarse libremente.
19. Un cubo de latón tiene una longitud de 33.2 cm de lado a 20.0°C. Halle (*a*) el aumento en el área superficial y (*b*) el aumento en el volumen cuando se calienta a 75.0°C.
20. ¿Cuál es el volumen de una bola de plomo a -12°C si su volumen a 160°C es de 530 cm^3?
21. Demuestre que cuando la temperatura de un líquido en un barómetro cambia en ΔT, y la presión es constante, la altura h cambia en $\Delta h = \beta h\,\Delta T$, donde β es el coeficiente de dilatación volumétrica del líquido. Desprecie la dilatación del tubo de vidrio.
22. En cierto experimento fue necesario estar en posibilidad de mover una fuente radiactiva pequeña a velocidades selectas extremadamente bajas. Esto se realizó asegurando la fuente a un extremo de una barra de aluminio y calentando la sección central de la barra de una manera controlada. Si la sección calentada efectiva de la barra de la figura 14 es de 1.8 cm, ¿a qué razón constante debe hacerse cambiar la temperatura de la barra si la fuente ha de moverse a una velocidad constante de 96 nm/s?
23. Demuestre que si α depende de la temperatura T, entonces

$$L \cong L_0\left[1 + \int_{T_0}^{T} \alpha(T)dT\right],$$

donde L_0 es la longitud a la temperatura de referencia T_0.

24. Poco después de que se formara la Tierra, el calor liberado por la desintegración de elementos radiactivos elevó la temperatura interna promedio de 300 a 3000 K, a cuyo valor permanece hoy día aproximadamente. Suponiendo un coeficiente de dilatación volumétrica promedio de $3.2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$, ¿en cuánto ha aumentado el radio de la Tierra desde su formación?
25. Se mide una barra en 20.05 cm de longitud usando una regla de acero a la temperatura ambiente de 20°C. Tanto la barra como la regla se introducen en un horno a 270°C, en donde la barra mide ahora 20.11 cm usando la misma regla. Calcule el coeficiente de dilatación térmica del material del cual está hecha la barra.
26. Considérese un termómetro de mercurio en vidrio. Supóngase que la sección transversal A del capilar es constante, y que V es el volumen del bulbo de mercurio a 0.00°C. Suponga que el mercurio llena apenas el bulbo a 0.00°C. Demuestre que la longitud L de la columna del mercurio en el capilar a una temperatura T, en °C, es

$$L = \frac{V}{A}(\beta - 3\alpha)T,$$

es decir, proporcional a la temperatura, siendo β el coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio y α el coeficiente de dilatación lineal del vidrio.

27. (*a*) Demuestre que si las longitudes de dos barras de sólidos diferentes son inversamente proporcionales a sus respectivos coeficientes de dilatación lineal a la misma temperatura inicial, la diferencia de longitud entre ellas será constante a todas las temperaturas. (*b*) ¿Cuál sería la longitud de una barra de acero y de una barra de latón a 0°C, de modo que a todas las temperaturas su diferencia de longitud sea 0.30 m?
28. Como resultado de un aumento de temperatura de 32°C, una barra con una grieta en su centro se pandea hacia arriba, como se muestra en la figura 15. Si la distancia fija L_0 = 3.77 m y el coeficiente de dilatación lineal es de 25 × 10^{-6}/C°, halle x, la distancia a la cual se eleva el centro.

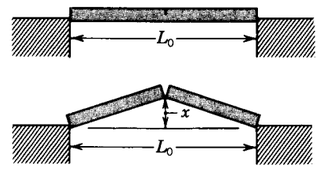


Figura 15 Problema 28.

29. Una barra de acero tiene 3.000 cm de diámetro a 25°C. Un anillo de latón tiene un diámetro interior de 2.992 cm a 25°C. ¿A qué temperatura común se deslizará justamente el anillo en la barra?
30. El área A de una placa rectangular es ab. Su coeficiente de dilatación lineal es α. Después de un aumento de temperatura ΔT, el lado a es más largo en Δa y el lado b es más largo en Δb. Demuestre que si despreciamos la pequeña cantidad $\Delta a\,\Delta b/ab$ (véase la Fig. 16), entonces $\Delta A = 2\alpha A\,\Delta T$, lo que coincide con la ecuación 14.
31. Demuestre que, si despreciamos cantidades extremadamente pequeñas, el cambio de volumen de un sólido en dilatación a través de un aumento de temperatura ΔT está dado por $\Delta V = 3\alpha V\,\Delta T$, donde α es el coeficiente de dilatación lineal. Véase la ecuación 15.

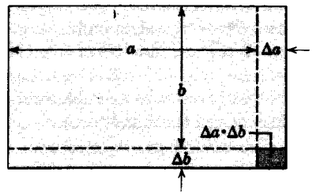


Figura 16 Problema 30.

32. Cuando la temperatura de una moneda de cobre (que no es cobre puro) de un centavo se eleva en 100°C, su diámetro aumenta en 0.18%. Halle el porcentaje de aumento en (*a*) el área de una cara, (*b*) el espesor, (*c*) el volumen, y (*d*) la masa del centavo. (*e*) Calcule su coeficiente de dilatación lineal.

33. La densidad es la masa dividida por el volumen. Si el volumen V depende de la temperatura, entonces también su densidad ρ. Demuestre que el cambio de densidad $\Delta\rho$ con el cambio de temperatura ΔT está dado por

$$\Delta\rho = -\beta\rho\,\Delta T,$$

donde β es el coeficiente de dilatación volumétrica. Explique el signo menos.

34. Cuando la temperatura de un cilindro de metal se eleva de 60 a 100°C, su longitud aumenta en 0.092%. (*a*) Halle el cambio porcentual en la densidad. (*b*) Identifique el metal.

35. A 100°C un frasco de vidrio está completamente lleno de 891 g de mercurio. ¿Qué masa de mercurio se necesita para llenar el frasco a -35°C? (El coeficiente de dilatación lineal del vidrio es de 9.0×10^{-6}/C°; el coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es de 1.8×10^{-4}/C°).

36. La figura 17 muestra la variación del coeficiente de dilatación volumétrica del agua entre 4°C y 20°C. La densidad del agua a 4°C es de 1000 kg/m³. Calcule la densidad del agua a 20°C.

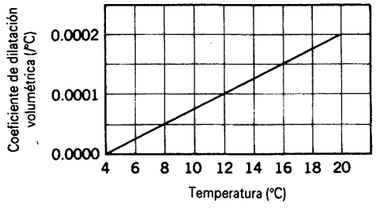


Figura 17 Problema 36.

37. Una barra compuesta de longitud $L = L_1 + L_2$ está hecha de una barra de material 1 y longitud L_1 unida a una barra de material 2 y longitud L_2, como se muestra en la figura 18. (*a*) Demuestre que el coeficiente efectivo de dilatación lineal α de esta barra está dado por $\alpha = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)/L$. (*b*) Si se utilizara acero y latón, diseñe dicha barra compuesta cuya longitud sea de 52.4 cm y cuyo coeficiente efectivo de dilatación lineal sea de 13×10^{-6}/C°.

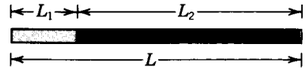


Figura 18 Problema 37.

38. (*a*) Demuestre que el cambio en inercia rotatoria I con la temperatura de un objeto sólido está dado por $\Delta I = 2\alpha I\,\Delta T$. (*b*) Una barra uniforme de latón, que gira libremente a 230 rev/s en torno a un eje perpendicular a ella en su centro, se calienta sin contacto mecánico hasta que su temperatura aumenta en 170°C. Calcule el cambio en la velocidad angular.

39. Un cilindro situado en chumaceras sin fricción se hace girar en torno a su eje y luego se calienta, sin contacto mecánico, hasta que su radio aumenta en 0.18%. ¿Cuál es el cambio porcentual en (*a*) el ímpetu angular, (*b*) la velocidad angular, y (*c*) la energía rotatoria del cilindro?

40. (*a*) Demuestre que el cambio con la temperatura en el periodo P de un péndulo físico está dado por $\Delta P = \frac{1}{2}\alpha P\,\Delta T$. (*b*) Un péndulo de reloj hecho de invar tiene un periodo de 0.500 s y es exacto a 20°C. Si el reloj se emplea en un clima en que la temperatura promedie 30°C, ¿qué corrección aproximada al tiempo indicado por el reloj es necesaria al cabo de 30 días?

41. Un reloj de péndulo con un péndulo hecho de latón está diseñado para mantener un tiempo preciso a 20°C. ¿De cuánto será el error, en segundos por hora, si el reloj opera a 0°C?

42. Un vaso de aluminio de 110 cm³ de capacidad se llena de glicerina a 22°C. ¿Cuánta glicerina, se derramará del vaso si la temperatura del vaso y de la glicerina se eleva a 28°C? (El coeficiente de dilatación volumétrica de la glicerina es de 5.1×10^{-4}/C°).

43. Un tubo vertical de vidrio de 1.28 m de longitud está medio lleno de un líquido a 20.0°C. ¿Cuál será el cambio de altura del líquido cuando el tubo se caliente a 33.0°C? Suponga que $\alpha_{vid} = 1.1 \times 10^{-5}$/C° y $\beta_{liq} = 4.2 \times 10^{-5}$/C°.

44. Una barra de acero a 24°C se atornilla fuertemente en ambos extremos y luego se enfría. ¿A qué temperatura empezará a ceder? Véase la tabla 1, capítulo 14.

45. Tres barras rectas de igual longitud, de aluminio, invar y acero, todas a 20°C, forman un triángulo equilátero con pivotes en los vértices. ¿A qué temperatura tendrá 59.95° el ángulo opuesto a la barra de invar? Véase el apéndice H para las fórmulas trigonométricas necesarias.

46. Dos barras de materiales diferentes, pero de las mismas longitudes L y las mismas áreas A en sus secciónes transversales están dispuestas extremo con extremo entre soportes rígidos y fijos como se muestra en la figura 19*a*. La temperatura es T y no existe un esfuerzo inicial. Las barras se calientan, de modo que su temperatura aumenta en ΔT. (*a*) Demuestre que la superficie de contacto de las barras se desplaza al calentarlas en una cantidad dada por

$$\Delta L = \left(\frac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2}\right) L\,\Delta T,$$

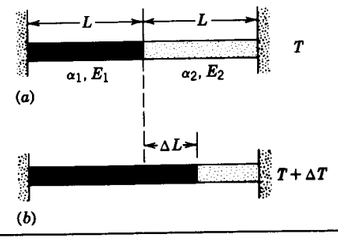


Figura 19 Problema 46.

donde α_1, α_2 son los coeficientes de dilatación lineal y E_1, E_2 son los módulos de Young de los materiales. Desprecie los cambios en las áreas de la sección transversal; véase la figura 19*b*. (*b*) Halle el esfuerzo en la superficie de contacto después del calentamiento.

47. Un cubo de aluminio de 20 cm de lado flota en mercurio. ¿Qué tanto más se hundirá el bloque cuando la temperatura se eleve de 270 a 320 K? (El coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es de 1.8×10^{-4}/C°).

48. Un tubo de vidrio casi lleno de mercurio está unido en serie a la base de un péndulo de hierro de 100 cm de longitud en forma de barra. ¿A qué altura estará el mercurio en el tubo de vidrio de modo que el centro de masa de este péndulo no se eleve ni baje con los cambios de temperatura? (El área de la sección transversal del tubo es igual a la de la barra de hierro. Desprecie la masa del vidrio. El hierro tiene una densidad de 7.87×10^3 kg/m³ y un coeficiente de dilatación lineal igual a 12×10^{-6}/C°. El coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es de 18×10^{-5}/C°).

49. La distancia entre las torres del claro principal del puente Golden Gate cerca de San Francisco es de 4200 ft (Fig. 20). La flecha del cable a la mitad entre las torres a 50°F es de 470 ft. Considere $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}$/F° para el cable y calcule (*a*) el cambio de longitud del cable y (*b*) el cambio en la flecha para un cambio de temperatura desde 10 hasta 90°F. Suponga que no hay flexión ni separación de las torres y una forma parabólica para el cable.

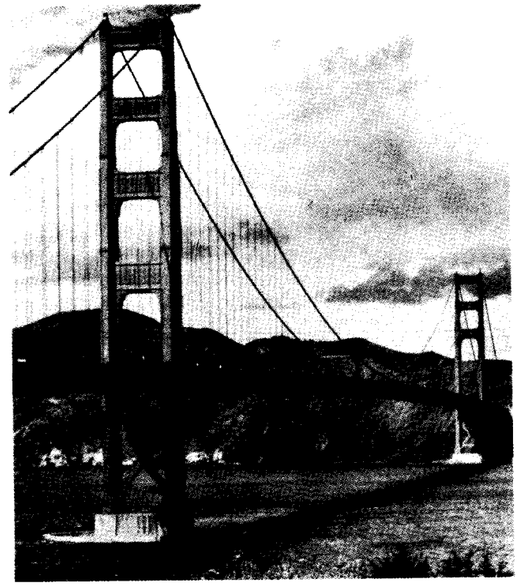


Figura 20 Problema 49.